Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Florian Nisbach

22. 6. 2010

Algebra II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.

a) Zeige: Wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, so ist $\dim(R) = 0$.

b) Gib ein Beispiel eines solchen Ringes an, in dem $\mathfrak{m} \neq 0$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei k ein Körper. Bestimme eine Noether-Normalisierung der k-Algebra

$$k[X,Y,Z]/(XY + Z^2, X^2Y - XY^3 + Z^4 - 1)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für eine Körpererweiterung L/k heißt die maximale Anzahl über k algebraisch unabhängiger Elemente aus L *Transzendenzgrad* der Erweiterung und wird mit $\operatorname{trdeg}_k L$ bezeichnet. Zeige:

a) Ist L'/L algebraisch und L/k eine beliebige Erweiterung, dann gilt $\operatorname{trdeg}_k L' = \operatorname{trdeg}_k L$.

b) $\operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot} k[X_1, \dots, X_n]) = n$.

c) Ist A eine endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra und L ihr Quotientenkörper, dann gilt $\operatorname{trdeg}_k L = \dim(A)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale in einem Vorlesungsring R und $I \subseteq R$ ein Ideal mit $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass dann auch gilt: $I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 29. 6. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.