

## Algebra II – Übungsblatt 11

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir definieren das *Spektrum* eines Ringes  $R$  als  $\text{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ prim}\}$ . Für ein Ideal  $I \subseteq R$  erklären wir weiter  $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ . Eine Teilmenge  $V \subseteq \text{Spec}(R)$  heißt *abgeschlossen*, wenn es ein Ideal  $I$  gibt mit  $V = V(I)$ . Ähnlich wie in Aufgabe 3 auf dem siebten Übungsblatt wollen wir zunächst zeigen, dass die  $V(I)$  in der Tat die abgeschlossenen Mengen einer Topologie, der sogenannten *Zariski-Topologie*, auf  $\text{Spec}(R)$  bilden.

a) Zeige dazu:

- $\emptyset$  und  $\text{Spec}(R)$  sind abgeschlossen.
- Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

b) Bestimme alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ , sodass  $\{\mathfrak{p}\}$  abgeschlossen ist.

c) Für eine Teilmenge  $M \subseteq \text{Spec}(R)$  heißt  $I(M) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}$  das *Verschwindungsideal* von  $M$ .  
Zeige: Für ein Ideal  $I \subseteq R$  gilt  $I(V(I)) = \sqrt{I}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein beliebiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ . Sei weiter

$$S := \{(a, b) \in R \times R \mid a \equiv b \pmod{\mathfrak{m}}\}.$$

Zeige folgende Aussagen:

- $S$  ist ein lokaler Ring.
- $S$  hat genau zwei nicht-maximale Primideale.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein noetherscher Integritätsring mit dem Quotientenkörper  $K \neq R$ . Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- $R$  ist ein diskreter Bewertungsring.
- Für jedes  $x \in K$  gilt  $x \in R$  oder  $x^{-1} \in R$ .
- Die Menge der Hauptideale von  $R$  ist bezüglich Inklusion total geordnet.
- Die Menge aller Ideale von  $R$  ist bezüglich Inklusion total geordnet.
- $R$  ist ein lokaler Hauptidealring.

**Abgabe** bis spätestens Dienstag, 6. 7. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.