KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

6. 7. 2010

Algebra II – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$ den zur p-adischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$ gehörigen Bewertungsring. In dieser Aufgabe studieren wir dessen Struktur.. Zeige dafür folgende Aussagen:

a) Die von Null verschiedenen Ideale von $\mathbb{Z}_p$ sind die Hauptideale
$$(p^n) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid v_p(x) \geq n\}$$
für $n \geq 0$, und es gilt $\mathbb{Z}_p / p^n \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$.

b) Die Restklassen $a (\mathrm{mod}\ p^n) \in \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$ werden in eindeutiger Darstellung durch
$$a \equiv a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} (\mathrm{mod}\ p^n)$$
gegeben, wobei $0 \leq a_i \leq p-1$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

c) Wie in der Vorlesung gesehen lässt sich jedes Element f von $\mathbb{Z}_p$ eindeutig darstellen als $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ mit Koeffizienten $0 \leq a_i \leq p-1$. Gib eine solche p-adische Darstellung für $\frac{1}{p-1}$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Der *Satz von Ostrowski* besagt, dass jeder Betrag auf $\mathbb{Q}$ entweder zu einem p-adischen Betrag oder zum gewöhnlichen Absolutbetrag äquivalent ist. In dieser Aufgabe wollen wir den nicht-archimedischen Teil des Satzes beweisen. Sei dazu $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf $\mathbb{Q}$ (d.h. $\forall n \in N : |n| \leq 1$). Zeige:

a) Dann gibt es genau eine Primzahl p mit $|p| < 1$.

b) Es gibt ein $e \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $|x|^e = |x|_p$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $|\cdot|_\infty$ den gewöhnlichen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{Q}^\times$ gilt:
$$\prod_{v \in \mathbb{P} \cup \infty} |x|_v = 1.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Hier wollen wir die Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$ studieren. Sei dazu $p \neq 2$ eine Primzahl[1]. Zeige:

a) Besitzt $\mathbb{Q}_p$ eine primitive n-te Einheitswurzel mit $p \mid n$, dann auch eine primitive p-te.

b) $\mathbb{Q}_p$ besitzt keine primitive p-te Einheitswurzel.

c) Besitzt $\mathbb{Q}_p$ eine primitive n-te Einheitswurzel, dann gilt $n \mid (p-1)$.

d) $\mathbb{Q}_p$ besitzt $p-1$ verschiedene $p-1$-te Einheitswurzeln.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 13. 7. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] 2 tanzt natürlich mal wieder aus der Reihe...