KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

14. 5. 2010

Algebra II – Lösung zu Blatt 3, Aufgabe 3 b)

Sei $2 \in R^\times$, und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal, $d \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gelten:
Behauptung a) $I \cdot \wedge^d(I) = 0$
Behauptung b) $\bigwedge^d(I) = \wedge^d(I/I^2)$

Der Vollständigkeit halber hier nochmal der Beweis ersten Behauptung: Ohne Einschränkung sei $d = 2$. Seien weiter $a, b, c \in I$, dann gilt:

$$a(b \wedge c) = \frac{1}{2}a(b \wedge c) + \frac{1}{2}a(b \wedge c) = \frac{1}{2}(ab \wedge c) + \frac{1}{2}(b \wedge ac)$$

$$= \frac{1}{2}(ab \wedge c) + \frac{1}{2}(bc \wedge a) = \frac{1}{2}(ab \wedge c) + \frac{1}{2}(c \wedge ab) = 0$$

Der Beweis der zweiten Behauptung scheint doch nicht so einfach zu sein. Wir holen daher ein bisschen weiter aus:

Lemma 1 Sei $0 \to P \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} N \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist $\otimes^d \phi : \otimes^d M \to \otimes^d N$ surjektiv und es gilt:

$$\mathrm{Kern}(\otimes^d \phi) = \mathrm{Bild}(i \otimes \mathrm{id}_M \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_M) + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes i \otimes \mathrm{id}_M \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_M) + \cdots + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_M \otimes i)$$

Lemma 2 Sei $\pi_M : \otimes^d M \to \wedge^d M$ die kanonische Projektion. Dann ist die Abbildung $\wedge^d(\phi) : \wedge^d M \to \wedge^d N$ surjektiv und es gilt:

$$\mathrm{Kern}(\wedge^d \phi) = \pi_M(\mathrm{Kern}(\otimes^d \phi))$$

Beweis von Lemma 1 Wir zeigen nur den Fall $d = 2$. Die restlichen Fälle folgen leicht mit Induktion. Zunächst bekommen wir aus der Exaktheit von $0 \to P \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} N \to 0$ und der Rechtsexaktheit des Tensorierens das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes P \arrow[d] & M \otimes P \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes i"] & & \\
P \otimes M \arrow[r, "i \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "id_P \otimes \phi"] & M \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \phi"] & N \otimes M \arrow[r] & 0 \\
P \otimes N \arrow[r, "i \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[r, "\phi \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d] & N \otimes N \arrow[r] & 0 \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Zunächst ist $\phi \otimes \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \phi)$ als Verknüpfung zweier surjektiver Abbildungen surjektiv. Es bleibt noch zu zeigen $\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi) = \mathrm{Bild}(i \otimes \mathrm{id}_M) + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes i)$. Dabei ist „$\supseteq$" klar.

„$\subseteq$”: Sei $z \in \mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi)$. Dann ist $(\mathrm{id}_M \otimes \phi)(z) \in \mathrm{Kern}(\phi \otimes \mathrm{id}_N) = \mathrm{Bild}(i \otimes \mathrm{id}_N) = \mathrm{Bild}(i \otimes \phi)$ (da $\mathrm{id}_P \otimes \phi$ surjektiv.) Sei also $a \in P \otimes M$ mit $(i \otimes \phi)(a) = (\mathrm{id}_M \otimes \phi)(z)$. Dann gilt also $z - (i \otimes \mathrm{id}_M)(a) \in \mathrm{Kern}(\mathrm{id}_M \otimes \phi) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes i)$, also insbesondere $z \in \mathrm{Bild}(i \otimes \mathrm{id}_M) + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes i)$, was zu zeigen war.

Beweis von Lemma 2 Wir zeigen wieder nur $d = 2$, der allgemeine Fall geht genauso, ist nur lästiger aufzuschreiben. Seien $\mathfrak{I}_M, \mathfrak{I}_N$ die Kerne von π_M bzw. π_N. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "\phi\otimes\phi_{|\mathfrak{I}_M}"] & M \otimes M \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "\phi\otimes\phi"] & M \wedge M \arrow[r] \arrow[d, "\phi\wedge\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_N \arrow[r, "i_N"] & N \otimes N \arrow[r, "\pi_N"] & N \wedge N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\phi \otimes \phi$ ist nach Lemma 1 surjektiv, π_N nach Definition, also auch $\pi_N \circ (\phi \otimes \phi) = (\phi \wedge \phi) \circ \pi_M$, also auch $\phi \wedge \phi$. Zu zeigen ist also noch $\mathrm{Kern}(\phi \wedge \phi) = \pi_M(\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi))$, wobei „$\supseteq$“ wieder klar ist.
„$\subseteq$“: Sei $x \in \mathrm{Kern}(\phi \wedge \phi)$, $y \in \pi_M^{-1}(x)$. Dann gilt $y \in \mathrm{Kern}((\phi \wedge \phi) \circ \pi_M) = \mathrm{Kern}(\pi_N \circ (\phi \otimes \phi))$ $= (\phi \otimes \phi)^{-1}(\mathrm{Kern}(\pi_N) = (\phi \otimes \phi)^{-1}(\mathrm{Bild}(i_N)$. Wegen der Surjektivität von ϕ hat man auch $(\phi \otimes \phi)(\mathfrak{I}_M) = \mathfrak{I}_N$ und daher $\mathrm{Bild}(i_N) = \mathrm{Bild}(i_N \circ (\phi \otimes \phi)) = \mathrm{Bild}((\phi \otimes \phi) \circ i_M)$. Also hat man (scharf hinschauen!) $(\phi \otimes \phi)^{-1}(\mathrm{Bild}(i_N)) = \mathrm{Bild}(i_M) + \mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi)$.
Setzt man nun alles zusammen, erhält man insgesamt $x \in \pi_M(\mathrm{Bild}(i_M) + \mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi)) = \pi_M(\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi))$.

Beweis von Behauptung b): Jetzt fangen wir auch nicht mehr an mit $d > 2\ldots$ Setzen wir also $M = I$, $N = I/I^2$, $\phi : I \to I/I^2$ die kanonische Projektion. Dann liefert das erste Lemma

$$\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi) = I \otimes I^2 + I^2 \otimes I = I(I \otimes I)$$

Das zweite Lemma liefert

$$\mathrm{Kern}(\phi \wedge \phi) = I(I \wedge I),$$

was nach Behauptung a) das Nullideal ist.

Bemerkung: Die Lemmata 1 und 2 kann man übrigens ohne viel Mühe noch andicken zur folgenden
Proposition Sei $\phi : M \to N$ ein surjektiver Modulhomomorphismen, dann sind die induzierten Algebrenhomomorphismen $T(\phi), S(\phi), \wedge(\phi)$ zwischen den Tensor- respektive symmetrischen und äußeren Algebren zu M und N ebenfalls surjektiv, und ihre Kerne sind jeweils die von $\mathrm{Kern}(\phi)$ erzeugten (zweiseitigen) Ideale.

Nachlesen kann man all dies in *N. Bourbaki – Algèbre I* auf den Seiten II.59, III.57f, III.69 und III.78.