KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH 8. 6. 2010

# Die Newton-Identitäten

**Satz** (Newton-Identitäten)

a) Über jedem Körper $K$[1] gelten die *Newton-Identitäten*

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} p_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dabei sind $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ die elementarsymmetrischen Polynome und $p_i := \sum_{j=1}^{n} X_j^i$.

b) Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, dann gilt also insbesondere

$$K[p_1, \dots, p_n] = K[\sigma_1, \dots, \sigma_n] = K[X_1, \dots, X_n]^{S_n}.$$

**Beweis:** Betrachte das „allgemeine Polynom $n$-ten Grades"

$$p := \prod_{i=1}^{n} (Y - X_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \sigma_{n-j} Y^j \in K(X_1, \dots, X_n)[Y].$$

Bezeichne dabei $L := K(X_1, \dots, X_n)$. Dieser Körper hat unendlich viele Elemente. Sei nun $M \in L^{n \times n}$ eine Matrix mit charaktaristischem Polynom $p$, etwa die Begleitmatrix von $p$. Die Eigenwerte von $M$ sind also $X_1, \dots, X_n$, und allgemeiner gilt: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sind $X_1^k, \dots, X_n^k$ die Eigenwerte von $M^k$. Wir haben also:

$$\forall k \in \mathbb{Z}: \quad \mathrm{tr}\,(M^k) = \sum_{j=0}^{n} X_j^k = p_k.$$

Die Spurabbildung ist $L$-linear, also ist die Aussage von Teil a) äquivalent zu

$$k\sigma_k = \mathrm{tr}\left( \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} M^i \right)$$

oder, leicht modifiziert:

$$(k - n)\sigma_k = \mathrm{tr}\left( \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-1} \sigma_{k-i} M^i \right) \tag{1}$$

Diese Identität werden wir zeigen. Sei dazu $x \in L, X := x \cdot I$. Die Idee ist nun, das charakteristische Polynom $p$ an $X$ auszuwerten und mit Polynomdivision den Linearfaktor $X - M$

[1] insbesondere also auch über $\mathbb{Q}$, und damit, da die Polynome rechts und links ganzzahlige Koeffizienten haben, auch über $\mathbb{Z}$ und somit sogar über jedem kommutativen Ring mit 1

abszuspalten. Formal verifiziere man die Gleichheit

$$\begin{aligned}
p(X) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \sigma_{n-j} X^j \\
&= (X-M)\big(IX^{n-1} + (M-\sigma_1 I)X^{n-2} + (M^2 - \sigma_1 M + \sigma_2 I)X^{n-3} + \ldots \\
&\quad + (M^{j-1} - \sigma_1 M^{j-2} + \sigma_2 M^{j-3} - \ldots + (-1)^{j-1}\sigma_{j-1} I)X^{n-j} + \ldots \\
&\quad + (M^{n-1} - \sigma_1 M^{n-2} + \sigma_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} I)I \\
&\quad - p(M)\big)
\end{aligned}$$

Nach Cayley-Hamilton gilt $p(M) = 0$. Sei nun $x$ kein Eigenwert von $M$. Dann ist die Matrix $X - M$ invertierbar. Wir bringen sie auf die linke Seite der Gleichung und bilden auf beiden Seiten die Spur. Dabei nutzen wir wieder deren $L$-Linearität sowie die Gleichheit $\operatorname{tr}(A \cdot X^k) = x^k \operatorname{tr}(A)$ aus und erhalten so

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big((X-M)^{-1} p(X)\big) &= n x^{n-1} + \operatorname{tr}(M - \sigma_1 I)x^{n-2} + \operatorname{tr}(M^2 - \sigma_1 M + \sigma_2 I)x^{n-3} + \ldots \\
&\quad + \operatorname{tr}(M^{j-1} - \sigma_1 M^{j-2} + \sigma_2 M^{j-3} - \ldots + (-1)^{j-1}\sigma_{j-1} I)x^{n-j} + \ldots \\
&\quad + \operatorname{tr}(M^{n-1} - \sigma_1 M^{n-2} + \sigma_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} I)
\end{aligned} \tag{2}$$

Wir behaupten nun, dass die linke Seite von (2) gerade $p'(x)$ ist. Es ist nämlich

$$p(X) = p(x) \cdot I = (x - X_1) \cdots (x - X_n) \cdot I.$$

Die Eigenwerte von $X - M$ sind $x - X_1, \ldots, x - X_n$, damit sind die Eigenwerte von $(X-M)^{-1}$ gerade $\frac{1}{x-X_1}, \ldots, \frac{1}{x-X_n}$ und wir erhalten somit

$$\operatorname{tr}\big((X-M)^{-1} p(X)\big) = \left(\frac{1}{x-X_1} + \cdots + \frac{1}{x-X_n}\right)(x-X_1)\cdots(x-X_n).$$

Nach der Leibnizregel ist das aber gerade die Ableitung $p'(x)$. Also ist (2) eine polynomiale Gleichung über $L$ vom Grad $n-1$. Da $L$ unendlich ist, finden wir $n$ Elemente von $L$, die keine Eigenwerte von $M$ sind. Ein Polynom über einem Körper von Grad $n-1$ mit $n$ Nullstellen ist aber konstant Null, und daher erhalten wir die Polynomidentität

$$\begin{aligned}
p'(Y) &= nY^{n-1} + \operatorname{tr}(M - \sigma_1 I)Y^{n-2} + \operatorname{tr}(M^2 - \sigma_1 M + I)Y^{n-3} + \ldots \\
&\quad + \operatorname{tr}(M^{j-1} - \sigma_1 M^{j-2} + \sigma_2 M^{j-3} - \ldots + (-1)^j \sigma_j I)Y^{n-j} + \ldots \\
&\quad + \operatorname{tr}(M^{n-1} - \sigma_1 M^{n-2} + \sigma_2 M^{n-3} - \ldots + (-1)^n \sigma_n I).
\end{aligned}$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten auf der linken und rechten Seite vor $Y^{n-k-1}$. Wenn wir uns erinnern, dass $p(Y) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\sigma_{n-j} Y^j$ gilt, und dies nach $Y$ ableiten, erhalten wir links also $(n-k)(-1)^k \sigma_k$ als Koeffizienten. Damit sind wir fast am Ziel, denn wenn wir bei der erhaltenen Gleichheit

$$(n-k)(-1)^k \sigma_k = \operatorname{tr}(M^k - \sigma_1 M^{k-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k I) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \sigma_{k-i} M^i\right)$$

links und rechts durch $(-1)^{k-1}$ teilen[2], dann steht die behauptete Gleichung (1) da. Puh!

[1] Dan Kalman, A MATRIX PROOF OF NEWTON'S IDENTITIES, *Mathematics Magazine* Vol. 73, No. 4.

[2] und schließlich noch $(-1)^{-i+1} = (-1)^{i-1}$ einsehen...