Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

14.4.2005

Algebra II – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{K}$ die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins.

(a) Zeige, dass die Monomorphismen in $\mathcal{K}$ genau die injektiven Ringhomomorphismen sind. Gib ein Beispiel einer kleinen, vollen Unterkategorie von $\mathcal{K}$ an, in der dies nicht mehr stimmt.

(b) Zeige, dass die natürliche Einbettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ in $\mathcal{K}$ ein Epimorphismus ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien A und B Objekte in einer Kategorie $\mathcal{K}$. Zeige folgende Aussagen:

(a) Die Gruppe $\mathrm{Aut}(B)$ operiert auf der Morphismenmenge $\mathrm{Mor}(A,B)$ durch

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(B) \times \mathrm{Mor}(A,B) & \to & \mathrm{Mor}(A,B) \\ (\sigma, \Phi) & \mapsto & \sigma \circ \Phi \end{array} .$$

(b) Wenn die Menge $I(A,B)$ aller Isomorphismen von A nach B nicht leer ist, dann ist sie eine Bahn unter dieser Operation, und die Aktion von $\mathrm{Aut}(B)$ auf dieser Bahn ist einfach transitiv.

(c) Wenn es einen Isomorphismus Φ von A nach B gibt, dann sind die Gruppen $\mathrm{Aut}(A)$ und $\mathrm{Aut}(B)$ zueinander isomorph.

(d) Wie operiert die Gruppe $\mathrm{Aut}(A)$ auf $\mathrm{Mor}(A,B)$?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien A, B, C Objekte einer Kategorie $\mathcal{K}$ und $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ und $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$ Morphismen. Zeige, dass $g \circ f$ ein Mono- / Epimorphismus ist, falls f und g beide Mono- / Epimorphismen sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei F die freie Gruppe auf der Menge $\{x, y\}$. Beweise, dass die von den beiden Elementen $u = x^2$ und $v = y^3$ erzeugte Untergruppe von F zu der freien Gruppe mit Erzeugenden u, v isomorph ist.

(b) Zeige, dass die von den drei Elementen $u = x^2$, $v = y^2$ und $z = xy$ erzeugte Untergruppe der freien Gruppe auf $\{x, y\}$ zu der freien Gruppe auf $\{u, v, z\}$ isomorph ist.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 21. April 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.