Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

21.4.2005

Algebra II – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Durch eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Kategorie $\mathcal{G}$ gegeben wie folgt:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) = \{\heartsuit\}, \quad \mathrm{Mor}(\heartsuit, \heartsuit) = G,$$

wobei die Verknüpfungen der Morphismen aus der Gruppenstruktur übernommen werden.

(a) Zeige, dass ein Funktor von $\mathcal{G}$ nach $\underline{Men}$ nichts anderes ist als die Wahl einer Menge M und einer Gruppenoperation von G darauf.

(b) Was sind die natürlichen Transformationen zwischen zwei solchen Funktoren?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $\underline{G - Men}$ die Kategorie der G-Mengen mit den G*-äquivarianten Abbildungen* (d. h. Homomorphismen von G-Mengen) als Morphismen.
Für die G-Menge M sei $M^G := \{m \in M \mid \forall g \in G : gm = m\}$.

(a) Zeige, dass für einen Morphismus $f : M \to N$ zwischen G-Mengen die Einschränkung von f nach M^G Werte in N^G annimmt und definiere eine Abbildung $I(f) : M^G \to N^G$. Damit wird offensichtlich

$$I : \begin{cases} \underline{G - Men} & \to \underline{Men} \\ M & \mapsto I(M) := M^G \end{cases}$$

ein Funktor.

(b) Finde eine G-Menge (M_0, μ), so dass I natürlich isomorph ist zu $\mathrm{Hom}(M_0, \cdot)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei F ein Funktor zwischen zwei Kategorien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$.

(a) Zeige, dass F Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet.

(b) Sei nun F volltreu. Zeige, dass dann für zwei Objekte A und B von $\mathcal{K}_1$ gilt: Falls $F(A)$ und $F(B)$ isomorph sind, dann auch A und B.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\underline{Ring}$ die Kategorie der Ringe mit Eins. Für jedes $R \in \mathrm{Ob}(\underline{Ring})$ kann man das *Kommutatorideal* $[R, R]$ einführen als das Erzeugnis der Menge $\{ab - ba \mid a, b \in R\}$.

(a) Zeige, dass der Homomorphiesatz einen Funktor F von $\underline{Ring}$ nach $\underline{Ring}$ induziert, der auf den Objekten durch $F(R) := R^{\mathrm{ab}} := R/[R, R]$ gegeben ist.

(b) Sei Id der Identitätsfunktor auf $\underline{Ring}$. Zeige, dass durch die natürliche Projektion π eine natürliche Transformation zwischen Id und F gegeben ist.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Eine Gruppe von Zwergen stand im Operationssaal und operierte auf einer Menge. Draußen standen noch alle möglichen endlichen Mengen mit allen möglichen Operationswünschen herum.

Chefarzt Hampel wusch sich die Hände und ging zur Tür. „Der nächste bitte!“ rief er; aber wer um alles in der Welt sollte der nächste sein? Bekümmert blickte er in den Warteraum, in dem ein Gewusel und Gemenge war, das seinesgleichen suchte. Er fühlte sich recht hilflos.

Da kam Oberschlau. Er war soeben von einem Verwaltungslehrgang zurückgekehrt und hatte nun seine erste Bewährungsprobe. Schon rief er die Patienten zu mehr Selbstbeteiligung auf; es sollte doch bitte aus jeder Isomorphieklasse von Operationswünschen nur ein Vertreter geschickt werden, und dieser solle – via fest gewählter Isomorphismen – seine Operation auf die anderen Mitglieder seiner Isomorphieklasse übertragen. Nachdem diesem kategorischen Imperativ seitens der Patienten unter einigem Gemurre genüge getan worden war, stellte sich zur allgemeinen Freude heraus, dass nicht nur viel weniger Wartende übrig waren, sondern dass sich überhaupt eine Warteschlange bilden konnte. (Wieder erleben wir den Einfluss der englischen Vorfahren Oberschlaus.)

Finde die Aufgabe und schreibe sie nebst Antwort, Rechnung und Kontrolle **sauber** *in Dein Heft. Versuche anschließend, Michael einen Punkt für Deinen Lösungsvorschlag abzuringen.*

Bemerkung: Eine Warteschlange ist hier eine abzählbare Menge mit einer Bijektion zu den natürlichen Zahlen (egal, ob mit oder ohne Null). Und eine Gruppe von Zwergen ist natürlich immer endlich erzeugt…

Es ist nicht mit letzter Sicherheit dokumentiert, welche Folgen die fest gewählten Isomorphismen bei den übrig gebliebenen Patienten zeitigten. Auch von Spontanheilungen wird berichtet. Diese sind aber wegen der unsicheren Quellenlage bei obiger Diskussion nicht zu berücksichtigen.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 28. April 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.