Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

28.4.2005

Algebra II – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige Kategorie. Ein Element $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ heißt *initiales Objekt* von $\mathcal{K}$, wenn $\mathrm{Mor}(I, A)$ für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ genau ein Element enthält. Ein Element $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ heißt *finales Objekt* von $\mathcal{K}$, wenn $\mathrm{Mor}(A, F)$ für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ genau ein Element enthält.

(a) Zeige, dass initiales Objekt und finales Objekt in $\mathcal{K}$, wenn vorhanden, jeweils bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

(b) Bestimme jeweils ein initiales Objekt und ein finales Objekt in den Kategorien

- (i) $\underline{Men}$ Mengen,
- (ii) $\underline{R\text{-}Mod}$ R-Linksmoduln für einen Ring R,
- (iii) $\underline{kRing1}$ kommutative Ringe mit Eins

mit den jeweils naheliegenden Morphismen.

(c) Finde eine (nichtleere) Kategorie, in der es weder ein initiales Objekt noch ein finales Objekt gibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien A und B Gruppen und F die freie Gruppe über dem Alphabet

$$\{s_a \mid a \in A\} \cup \{t_b \mid b \in B\},$$

wobei gelten soll: Für $a \neq a' \in A$ ist $s_a \neq s_{a'}$, für $b \neq b' \in B$ ist $t_b \neq t_{b'}$ und für alle $a \in A, b \in B$ ist $s_a \neq t_b$. Sei weiter N der kleinste Normalteiler, der das Gruppenerzeugnis von

$$\{s_{a_1} s_{a_2} s_{a_1 a_2}^{-1} \mid a_1, a_2 \in A\} \cup \{t_{b_1} t_{b_2} t_{b_1 b_2}^{-1} \mid b_1, b_2 \in B\}$$

enthält. Dann ist das *freie Produkt* $A * B$ von A und B definiert als die Gruppe F/N. Zeige dazu:

(a) Die Abbildungen

$$\lambda_A : A \to A * B,\ a \mapsto [s_a] := s_a \circ N \text{ und } \lambda_B : B \to A * B,\ b \mapsto [t_b] := t_b \circ N$$

sind Gruppenhomomorphismen. $A * B$ wird so zum Koprodukt von A und B in der Kategorie der Gruppen. Folgere daraus, dass λ_A und λ_B injektiv sind.

(b) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist isomorph zur freien Gruppe über einer zweielementigen Menge.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\mathcal{K}$ eine Kategorie. Dann bezeichnet $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$ die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B,A)$ für alle Objekte A,B und den naheliegenden Verknüpfungsregeln. Man nennt $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$ die *opposite Kategorie* zu $\mathcal{K}$.

Sei $\mathcal{L}$ eine weitere Kategorie. Wie hängen kontravariante Funktoren von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$ mit kovarianten Funktoren von $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{L}$ zusammen?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $F : \underline{Men} \to \underline{Gruppen}$ der Funktor, der jeder Menge M die freie Gruppe $F(M)$ über dem Alphabet M zuweist† und $V : \underline{Gruppen} \to \underline{Men}$ der Vergissfunktor. Zeige, dass F linksadjungiert zu V ist.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 6. Mai 2005, um 12 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in (aber nicht während) der Vorlesung direkt dort.

†Was mit den Morphismen geschieht, ist hier klar!