Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

6.5.2005

Algebra II – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien K ein Körper und V bzw. W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bzw. $C = \{c_1, \dots, c_m\}$. Seien weiter $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\psi \in \mathrm{End}_K(W)$ Endomorphismen. Dann ist durch lineare Fortsetzung von

$$(\varphi \otimes_K \psi)(b_i \otimes c_j) := \varphi(b_i) \otimes \psi(c_j) \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ und } j = 1, \dots, m$$

ein Endomorphismus $\varphi \otimes_K \psi$ von $V \otimes_K W$ gegeben.

(a) Sei zunächst K algebraisch abgeschlossen. Zeige, dass das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}(\varphi \otimes_K \psi)$ nur von den charakteristischen Polynomen $\mathrm{CP}(\varphi)$ und $\mathrm{CP}(\psi)$ abhängt. In welcher Weise?

(b) Sehe nun ein, dass die Voraussetzung an K unnötig war und löse die Behauptung aus (a) in Allgemeinheit.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei A eine endliche abelsche Gruppe mit n Elementen. Dann bezeichnen wir die Menge der Homomorphismen $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ mit $\hat{A}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $|\hat{A}| = n$.

Hinweis: Zeige die Behauptung zunächst im Spezialfall einer zyklischen Gruppe A und verwende dann den Struktursatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(b) Sei $\chi \in \hat{A}$ nicht die konstante Abbildung $\mathbb{1}$, die alle Elemente von A nach $1 \in \mathbb{C}^\times$ schickt. Dann gilt:

$$\sum_{a \in A} \chi(a) = 0.$$

(c) Für $\chi, \psi \in \hat{A}$ betrachten wir ihr Produkt $\chi \cdot \psi$ im Gruppenring $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Abb}(A, \mathbb{C})$. Es gilt:

$$\chi \cdot \psi = \begin{cases} n\chi & \text{für } \psi = \chi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) $\hat{A}$ ist linear unabhängig und somit eine Basis von $\mathbb{C}[A]$.

Hinweis: Benutze (c) und die Lineare Algebra II.

(e) Die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}[A] & \to \mathbb{C}^n \\ \frac{1}{n} \sum\limits_{\chi \in \hat{A}} \lambda_\chi \chi & \mapsto (\lambda_\chi)_{\chi \in \hat{A}} \end{cases}$$

mit komponentenweiser Multiplikation auf der rechten Seite ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei D eine quadratfreie ganze Zahl und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der zugehörige quadratische Zahlkörper. K ist auf natürliche Weise eine $\mathbb{Q}$-Algebra. Bestimme die Funktionen Norm und Spur für diesen Fall explizit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien F ein Körper und $a, b \in F^\times$.

(a) Untersuche, ob es eine vierdimensionale F-Algebra A mit Basis $\{1_A, I, J, K\}$ gibt, in der 1_A das Einselement ist und ansonsten folgende Relationen gelten:

$$I^2 = a \cdot 1_A,\ J^2 = b \cdot 1_A,\ I \cdot J = K = -(J \cdot I).$$

(b) Untersuche, ob es eine dreidimensionale F-Algebra B mit Basis $\{1_B, I, J\}$ gibt, in der 1_B das Einselement ist und ansonsten folgende Relationen gelten:

$$I^2 = a \cdot 1_B,\ J^2 = b \cdot 1_B,\ I \cdot J = 0 = J \cdot I.$$

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 12. Mai 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung an den dafür vorgesehenen Kasten direkt dort.