Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

12.5.2005

Algebra II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper der primen Charakteristik p. Zeige: Wenn p die Ordnung von G teilt, dann ist $K[G]$ nicht halbeinfach.

Hinweis: Betrachte den von $s = \sum_{g \in G} g$ erzeugten Untermodul von $K[G]$. Beweise und verwende

$$s \in \mathcal{Z}(K[G]) \text{ und } s^2 = 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und A die K-Algebra $K^{n \times n}$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass alle irreduziblen A-Moduln isomorph zu K^n mit der Standardoperation sind. Zeige dafür:

(a) Jedes irreduzible A-Linksideal I ist zu K^n isomorph. Insbesondere ist K^n ein irreduzibler A-Modul.

Hinweis: Konstruiere in I eine Matrix M vom Rang 1. Was ist $A \cdot M$?

(b) A ist halbeinfach.

(c) Jeder irreduzible A-Modul ist zu K^n isomorph.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei F ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und $a, b \in F^\times$. Die zugehörige Algebra A aus Aufgabe 4.4 (a) heißt eine *Quaternionenalgebra*.

(a) Zeige, dass A einfach ist.

(b) Wie sieht das Zentrum $\mathcal{Z}(A)$ von A aus?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Bestimme alle einfachen $K[X]$-Moduln.

(b) Sei nun M ein endlichdimensionaler $K[X]$-Modul. Zeige, dass gilt:

$$M \text{ ist halbeinfach} \iff [m \mapsto X \cdot m] \in \operatorname{End}_{K-VR}(M) \text{ ist diagonalisierbar}.$$

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 19. Mai 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung an den dafür vorgesehenen Kasten direkt dort.