Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

19.5.2005

Algebra II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei F ein Körper und A eine d-dimensionale einfache F-Algebra. Zeige, dass für jeden A-Modul $M \neq \{0\}$ gilt:

$$\dim_{F-VR} M \geq \sqrt{d}.$$

(b) Sei A eine Quaternionenalgebra wie in Aufgabe 4.4 (a) über einem Körper F, dessen Charakteristik nicht 2 ist. Nimm an, dass A kein Schiefkörper ist. Dann gibt es ein $v \in A \smallsetminus \{0\}$ mit $\mathcal{N}(v) = 0$. Zeige, dass dann gilt:

$$\dim_{F-VR}(Av) = 2 \text{ und } A \cong F^{2\times 2}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, K ein Körper und M ein $K[G]$-Modul durch die Operation $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{K-VR}(M)$. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\chi : G \to K^\times$ ein Homomorphismus. Dann ist

$$U_\chi(M) := \{m \in M \mid \forall g \in G : \rho(g)(m) = \chi(g)m\}$$

ein $K[G]$-Untermodul von M.

(b) Ab sofort wollen wir $U_{\mathbb{1}}(M)$ auch mit M^G bezeichnen. Sei

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{\Psi} Q \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $K[G]$-Moduln. Dann ist auch

$$0 \longrightarrow N^G \xrightarrow{\Phi^G} M^G \xrightarrow{\Psi^G} Q^G$$

mit den eingeschränkten Homomorphismen exakt. Wenn $\mathrm{char}(K)$ kein Teiler der Gruppenordnung $\mathrm{ord}(G)$ ist, dann ist Ψ^G sogar surjektiv.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe, K ein Körper, M ein endlichdimensionaler $K[G]$-Modul durch die Operation $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{K-VR}(M)$, U ein $K[G]$-Untermodul von M und weiter $\beta : M \times M \to K$ eine Bilinearform, für die gilt:

$$\forall g \in G, \forall m, n \in M : \beta(\rho(g)(m), \rho(g)(n)) = \beta(m, n). \tag{1}$$

Zeige, dass gilt

(a) $U^\perp := \{m \in M \mid \forall u \in U : \beta(u,m) = 0\}$ ist ein $K[G]$-Untermodul von M.

(b) Wenn β *anisotrop* ist, d. h. wenn für alle $m \in M$ gilt:

$$(\beta(m,m) = 0) \Longrightarrow (m = 0),$$

dann gilt sogar $M = U \oplus U^\perp$.

(c) Für $K = \mathbb{R}$ gibt es ein Skalarprodukt β auf M, das $(\star)$ erfüllt.

(d) Bestimme für $K = \mathbb{R}$, $G = \mathcal{S}_3$ und ϱ gegeben durch

$$\varrho((123)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \varrho((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alle möglichen Skalarprodukte β, die $(\star)$ erfüllen.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeige: Das Zentrum eines einfachen Rings ist ein Körper.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 27. Mai 2005, um 12 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor der Vorlesung direkt dort.