Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

27.5.2005

Algebra II – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Zeige, dass dann $R[\![X]\!]$ ein noetherscher Ring ist.

Hinweis: Beweis des Hilbert'schen Basissatzes

(b) Zeige, dass der Ring $\{f \in \mathbb{R}[\![X]\!] \mid f \text{ konvergiert auf } \mathbb{R}\}$ nicht noethersch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Finde jeweils ein möglichst kleines Erzeugendensystem für folgende Ideale von $\mathbb{R}[X,Y]$:

(a) $I_1 := \{f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \forall (x,y) \text{ mit } x^2+y^2=1 : f(x,y)=0\}$.

(b) $I_2 := \{f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid f(1,0)=f(0,1)=f(-1,0)=f(0,-1)=0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $M \neq \{0\}$ ein R-Modul. Dann gibt es für jedes $m \in M$ das Annullatorideal $\operatorname{Ann}(m) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0\}$. Sei damit $\mathcal{M} := \{\operatorname{Ann}(m) \mid m \in M \smallsetminus \{0\}\}$. Zeige folgende Aussagen:

(a) Für $m \in M$ gilt: $R \cdot m$ und $R/\operatorname{Ann}(m)$ sind als R-Moduln isomorph.

(b) Jedes maximale Element von $\mathcal{M}$ ist ein Primideal.

(c) Falls M noethersch ist, so gibt es ein $r \geq 1$, Primideale $p_1, \ldots, p_r$ in R und Untermoduln $M = M_r \supseteq \cdots \supseteq M_1 \supseteq M_0 = \{0\}$ von M, so dass M_i/M_{i-1} als R-Modul isomorph ist zu R/p_i für $i = 1, \ldots, r$.

Bemerkung: Es darf hier angenommen werden, dass R noethersch ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bezeichne R den Polynomring $K[X,Y]$ über einem Körper K. Zeige:

(a) Das Ideal $\mathfrak{m} := RX + RY$ ist maximal.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei I_n das Idealerzeugnis von $\{X^n, X^{n-1}Y, \ldots, XY^{n-1}, Y^n\}$. Dann operieren X und Y trivial auf I_n/I_{n+1}.

(c) Wenn $a_1, \ldots, a_r$ Erzeuger von I_n als R-Modul sind, dann gilt $r \geq n+1$.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 2. Juni 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung an den dafür vorgesehenen Kasten direkt dort.