Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

2.6.2005

Algebra II – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ von höchstens zwei Elementen erzeugt wird.

Hinweis: Falls $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ gilt, untersuche Polynome in $\mathfrak{p}$ von möglichst kleinem Grad.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, N ein R-Modul und

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{\Psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass dann die Sequenz

$$M' \otimes N \xrightarrow{\Phi \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{\Psi \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

exakt ist[†], der R-Modulhomomorphismus $\Phi \otimes \mathrm{id}_N$ jedoch im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei R ein kommutativer Ring und M ein artinscher R-Modul. Sei weiter $\varphi \in \mathrm{End}_{R-Mod}(M)$ injektiv. Zeige, dass φ dann sogar ein Isomorphismus ist.

(b) Finde eine dem (a)-Teil möglichst ähnliche (wahre) Aussage für einen noetherschen R-Modul M.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Von den folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln tensoriere jeden mit jedem:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 2.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 9. Juni 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung an den dafür vorgesehenen Kasten direkt dort.

[†]Man sagt: Tensorieren ist *rechtsexakt*.