Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

9.6.2005

Algebra II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring und $n \neq 0$ ein Element von R. Dann ist für jeden R-Modul M das Tensorprodukt $R[\frac{1}{n}] \otimes_R M$ ein $R[\frac{1}{n}]$-Modul. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist M ein n-*Torsionsmodul*, d. h. für alle $m \in M$ gibt es eine Potenz n^{r_m} von n mit $n^{r_m} m = 0$, dann ist $R[\frac{1}{n}] \otimes_R M = 0$.

(b) Ist M ein n-*torsionsfreier* Modul, d. h. die Multiplikation mit n ist injektiv, dann gilt

$$R[\frac{1}{n}] \otimes_R M = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} R \frac{1}{n^k} \right) \otimes M = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(R \frac{1}{n^k} \otimes M \right).$$

Außerdem ist ein Element $1 \otimes m \in R[\frac{1}{n}] \otimes_R M$ genau dann Null, wenn $m = 0$ gilt.

(c) $Q := M / \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Kern}(n^k \cdot)$ ist ein n-torsionsfreier Modul, wobei $n^k \cdot$ die Linksmultiplikation mit n^k bezeichne.

(d) Ein Element $1 \otimes m$ aus $R[\frac{1}{n}] \otimes_R M$ ist genau dann Null, wenn m von einer Potenz n^{r_m} von n annulliert wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein freier R-Modul mit Basis $b_1, \ldots, b_n$. Zeige, dass dann für die Tensoralgebra $T(M)$ die R-Algebren $T(M)/[T(M), T(M)]$ und $R[X_1, \ldots, X_n]$ isomorph sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ und $f = \mathrm{MP}(\alpha)$ das Minimalpolynom von α. Dieses habe Grad $n = r + 2s$, wobei r die Anzahl der reellen Nullstellen von f bezeichne. Zeige, dass dann gilt:

(a) $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$.

(b) $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{r+2s}$.

(c) Bezeichne σ die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$. Dann gilt für den Eigenraum zum Eigenwert 1 des Automorphismus $\mathrm{id}_K \otimes \sigma$ von $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Eig}(\mathrm{id}_K \otimes \sigma, 1) \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und M ein $K[X]$-Modul, der als K-Vektorraum endlichdimensional ist. Zeige, dass dann $K[\![X]\!] \otimes_{K[X]} M$ der Hauptraum der Multiplikation mit X auf M zum Wert† 0 ist.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

„Warum hat das Auto Räder? Warum ist es hier schön? Warum hast Du so große Augen?“

Oberschlau war gerade mit dem kleinen Warumpel im frühsommerlichen Laubwald unterwegs und wollte eigentlich nur ausspannen. Geduldig wie man ihn sonst nicht kennt versuchte er, die Fragen seines kleinen Begleiters zu beantworten. Schließlich machten sie auf einer Lichtung Rast, und Oberschlau war bald eingeschlafen.

Nachdem er die Schokolade gleichmäßig über seine Wangen verteilt hatte, wurde Warumpel wieder unternehmungslustig. Wenig später hatte er aus einem Mäuseloch ein Stück der seltenen Qumodzet-Wurzel ausgegraben. Schon stand er wieder neben Oberschlau und weckte ihn begeistert.

Auch Oberschlau besah sich das gute Stück sehr aufmerksam. Warumpel wollte einen Ring daraus gemacht haben. Da sagte Oberschlau zu ihm: „Als Kind habe ich so etwas auch einmal probiert. Leider war das nicht sehr erfolgreich. Der Eichenwickler hat den Ring in Ruhe gelassen; aber einige Spanner fraßen ihn auf, bevor ich so richtig mit meinem Produkt fertig war. Das würde gerade zurzeit auch wieder passieren.“

Natürlich war Warumpel mit dieser Antwort noch lange nicht zufrieden, und so gab Oberschlau in der für ihn charakteristischen Art noch einen zweiten Grund, wieso das nichts bringt (der in Wirklichkeit der erste Grund war, aber auch Warumpel wiederholte sich gelegentlich). Auch damit war Warumpel noch nicht zufrieden...

Welche Gründe mag Oberschlau wohl genannt haben, die verhindern, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die additive Gruppe eines Ringes ist?

Warum freute er sich am Abend auf den nächsten Arbeitstag?

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 16. Juni 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung an den dafür vorgesehenen Kasten direkt dort.

†Gemeint: „Eigenwert“. Falls 0 kein Eigenwert ist, so ist der zugehörige Hauptraum der Nullraum.