Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

16.6.2005

Algebra II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale K-Algebra. Zeige:

(a) $\mathrm{Rad}(A) := \{x \in A \mid \forall y \in A : \mathrm{Spur}(xy) = 0\}$ ist ein Ideal in A.

Sei nun die Charakteristik von K Null.

(b) Alle Elemente in $\mathrm{Rad}(A)$ sind nilpotent.

(c) $\mathrm{Rad}(A)$ liegt in jedem maximalen Ideal von A.

(d) Es gibt eine $\mathbb{Q}$-Algebra A und ein nilpotentes x in A, das in keinem maximalen Ideal von A liegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei K ein algebraischer Zahlkörper (d. h. eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$), $\mathcal{O}$ eine Ordnung von K und $I \neq 0$ ein Ideal von $\mathcal{O}$. Zeige:

(a) I hat endlichen Index in $\mathcal{O}$.

(b) Jedes von 0 verschiedene Primideal von $\mathcal{O}$ ist maximal.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha+8 = 0$. Bestimme die Maximalordnung von K.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei K ein Körper, $f(X,Y) := Y^2 - X^2(X+1) \in K[X,Y]$ und $R := K[X,Y]/(f)$. Zeige:

(a) R ist nullteilerfrei.

(b) R ist nicht ganzabgeschlossen.

(c) $\mathrm{Quot}(R)$ ist isomorph zu $K(T)$, wobei T eine weitere Variable sei.

(d) Der ganze Abschluss von R in $\mathrm{Quot}(R)$ ist isomorph zu $K[T]$.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 23. Juni 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder in der Übung.