Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

23.6.2005

Algebra II – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Gegeben seien ein kommutativer und nullteilerfreier Ring R sowie eine Teilmenge $N \subseteq R$, für die

$$1 \in N,\ 0 \notin N,\ \text{und } \forall m, n \in N : mn \in N$$

gilt. Dann ist

$$N^{-1}R := \{\frac{r}{n} \mid r \in R, n \in N\}$$

ein Teilring des Quotientenkörpers von R.
Zeige, dass $N^{-1}R$ ganz abgeschlossen ist, falls R selbst ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring und G eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe von R.
Zeige, dass R über seinem Teilring $R^G = \{r \in R \mid \forall g \in G : g(r) = r\}$ ganz ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring. Mit „Modul" meinen wir jetzt immer R-Linksmodul...
Ein Modul P heißt *projektiv*, wenn für alle Moduln M, Q, für alle Modulhomomorphismen $\varphi : P \longrightarrow Q$, und für alle surjektiven Modulhomomorphismen $\pi : M \longrightarrow Q$ ein Modulhomomorphismus $\psi : P \longrightarrow M$ existiert, sodass $\varphi = \pi \circ \psi$ gilt. (Mit anderen Worten: Der Funktor $\mathrm{Hom}\,(P, -)$ ist nicht nur linksexakt, sondern sogar exakt.)
Zeige die folgenden Aussagen:

a) Jeder freie Modul ist projektiv.

b) Wenn P ein projektiver Modul ist, dann gibt es zu jeder kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

von Moduln einen Modulhomomorphismus $\iota : P \longrightarrow M$, sodass $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_P$ gilt.

c) Ein Modul P ist projektiv genau dann, wenn er ein direkter Summand in einem freien Modul ist (d.h. $\exists Q : P \oplus Q$ ist freier Modul).

d) Wenn K ein Körper ist und G eine endliche Gruppe, deren Ordnung kein Vielfaches der Charakteristik von K ist, dann ist jeder $K[G]$-Modul projektiv.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring und M, N zwei endlich erzeugte projektive R-Moduln.

a) Zeige, dass auch $M \oplus N$ und $M \otimes_R N$ endlich erzeugte projektive R-Moduln sind.

Die Menge $\mathcal{H}(R)$ aller Isomorphieklassen endlich erzeugter projektiver R-Moduln wird vermöge der direkten Summe als Addition und des Tensorprodukts als Multiplikation (diese sind jeweils auf den Isomorphieklassen wohldefiniert) zu einem kommutativen Halbring.

b) Wenn R ein Hauptidealring ist, so finde einen Isomorphismus

$$(\mathcal{H}(R), \oplus, \otimes_R) \cong (\mathbb{N}_0, +, \cdot)!$$

Bemerkung: Den Ring der formalen Differenzen $M - N$ (mit $M, N \in \mathcal{H}(R)$) nennt man den *Grothendieckring* von $\mathcal{H}(R)$. Er heißt auch $K_0(R)$ und ist der Ausgangspunkt der *algebraischen K-Theorie.*

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es seien G eine endliche Gruppe und X eine (nichtleere) endliche G-Menge. Weiter seien K ein Körper und $V := \mathrm{Abb}(X, K)$.

a) Zeige, dass durch

$$\forall g \in G, f \in V, x \in X : \quad (\rho(g)(f))(x) := f(g^{-1}x),$$

eine Darstellung $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V)$ gegeben ist.

b) Berechne den Charakter der Darstellung ρ aus Teil a).

c) Für $g \in G$ sei $\mathrm{Fix}(g, X) := \{x \in X | gx = x\} = X^{\langle g \rangle}$. Wieso gilt auf jeden Fall

$$\sum_{g \in G} \#\mathrm{Fix}(g, X) \geq \#G?$$

d) Was ist $\dim_K(V^G)$?

e) Zeige: wenn K die Charakteristik 0 hat, dann ist ρ genau dann irreduzibel, wenn

$$\beta_G(\chi_\rho, \chi_\rho) = \#G$$

gilt.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 30. Juni 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder direkt bei dem dafür vorgesehenen Kasten in der Übung.