

Algebra II – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ eine Darstellung von G . Sei weiter die Darstellung $\hat{\varrho} : G \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{3 \times 3})$ gegeben durch:

$$\forall g \in G, \forall A \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \hat{\varrho}(g)A = \varrho(g)A\varrho(g^{-1}).$$

Welche Zahlen können als Vielfachheit der trivialen eindimensionalen Darstellung als Teildarstellung von $\hat{\varrho}$ vorkommen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Rotationsgruppe des Würfels ist isomorph zu \mathcal{S}_4 aufgefasst als Permutationsgruppe der vier Diagonalen des Würfels. Sei $\varrho : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathrm{GL}_8(\mathbb{C})$ die Darstellung, die durch die Aktion der Rotationsgruppe auf den acht Ecken des Würfels gegeben wird.

- Gib den Charakter χ_ϱ von ϱ an.
- Zerlege ϱ in irreduzible Teildarstellungen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe, $\varrho_1, \dots, \varrho_{\kappa(G)}$ die irreduziblen komplexen Darstellungen von G , für alle $1 \leq i \leq \kappa(G) : \chi_i := \chi_{\varrho_i}$, g, h Elemente von G und C die Konjugationsklasse von g in G . Zeige:

$$\sum_{i=1}^{\kappa(G)} \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } h \notin C, \\ \frac{|G|}{|C|} & \text{falls } h \in C. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien G, H endliche Gruppen, V, W endlichdimensionale $\bar{\mathbb{Q}}$ -Vektorräume und $\varrho : G \rightarrow \mathrm{Aut}(V)$, $\sigma : H \rightarrow \mathrm{Aut}(W)$ Darstellungen von G in V bzw. von H in W . Wir definieren die Tensordarstellung $\varrho \otimes \sigma : G \times H \rightarrow \mathrm{Aut}(V \otimes W)$ durch

$$(\varrho \otimes \sigma)(g, h) = \varrho(g) \otimes \sigma(h).$$

Für die zugehörigen Charaktere gilt: $\chi_{\varrho \otimes \sigma}(g, h) = \chi_\varrho(g) \cdot \chi_\sigma(h)$. Zeige folgende Aussagen:

- Falls ϱ und σ irreduzibel sind, so auch $\varrho \otimes \sigma$.
- Jede irreduzible Darstellung von $G \times H$ ist zu einer Darstellung vom Typ $\varrho \otimes \sigma$ isomorph, wobei ϱ bzw. σ eine irreduzible Darstellung von G bzw. H ist.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 7. Juli 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder direkt bei dem dafür vorgesehenen Kasten in der Übung.