Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein
Hendrik Kasten

7.7.2005

Algebra II – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$. Zeige folgende Aussagen:

(a) $K[G]$ wird zum $G \times G$-Modul via $(g,h) \cdot f := \delta_g f \delta_{h^{-1}}$.

(b) Die $K[G \times G]$-Untermoduln von $K[G]$ sind die zweiseitigen Ideale in $K[G]$.

(c) $K[G]$ ist eine direkte Summe von minimalen zweiseitigen Idealen:

$$K[G] = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_k.$$

(d) Sei $K[G] \ni 1 = e_1 + \cdots + e_k$ mit $e_i \in I_i$. Dann gilt $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, also insbesondere $e_i^2 = e_i$, und $e_i \in \mathcal{Z}(K[G])$.

(e) Jedes I_i ist eine einfache K-Algebra.

(f) Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $k = \kappa(G)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Normalteiler N und $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine irreduzible Darstellung von G auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zeige, dass dann gilt:

- Entweder gibt es eine Untergruppe $H \neq G$ von G, die N enthält, und eine irreduzible Darstellung σ von H, so dass ϱ von σ induziert ist,

- oder die Restriktion von ϱ auf N ist *isotypisch*, d.h. sie ist eine direkte Summe von isomorphen irreduziblen Darstellungen.

Hinweis: Sei U eine isotypische Komponente von V als $\mathbb{C}[N]$-Modul. Setze $H := \mathrm{Stab}_G(U)$. Zeige: $V \cong \mathrm{Ind}_H^G(U)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei q eine Primzahlpotenz, $F := \mathbb{F}_q$ und $G := \mathrm{GL}_2(F)$. Dann ist durch

$$B := \{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in F,\ xz \neq 0\}$$

eine Untergruppe von G definiert. Sei weiter $\alpha : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus. Dieser induziert $\beta : B \to \mathbb{C}^\times$ durch $\beta\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) := \alpha(xz^{-1})$ und $\varrho := \mathrm{Ind}_B^G(\beta)$.
Zeige, dass ϱ genau dann irreduzibel ist, wenn α^2 nicht der triviale Homomorphismus ist. Löse dafür die folgenden Teilaufgaben:

(a) Berechne $\#B$, $\#G$ und $(G:B)$.

(b) Sei $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ in B. Für welche Nebenklassen $\bar{g} \in B\backslash G$ ist $\bar{g}\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)\bar{g}^{-1} \subseteq B$?

Hinweis: Vorsicht, das hängt von $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ ab!

(c) Zeige, dass gilt

$$\sum_{x \neq z \in F^\times} \alpha^2(x)\alpha^2(z^{-1}) = 1 - q \quad \text{falls } \alpha^2 \neq 1.$$

Hinweis: Benutze Blatt 4 Aufgabe 2 (b).

(d) Berechne $\langle \varrho, \varrho \rangle_G$ mithilfe der Frobenius-Reziprozität.

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 14. Juli 2005, um 15.45 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder direkt bei dem dafür vorgesehenen Kasten in der Übung.