Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
PD Dr. Stefan Kühnlein

Karlsruhe, den 06.05.2005

Eine mögliche Lösung von Aufgabe 3.3

Zu zeigen ist, dass der Vergissfunktor V von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen rechtsadjungiert ist zum Funktor F, der einer Menge M die freie Gruppe $F(M)$ zuordnet. (Was mit den Morphismen passiert, ist jeweils aus der Vorlesung bekannt.)

Zunächst muss man ja wohl oder übel für jede Menge M und jede Gruppe G eine Bijektion

$$\eta_{M,G} : \mathrm{Hom}(F(M), G) \longrightarrow \mathrm{Abb}(M, V(G))$$

angeben. Diese wird durch die universelle Abbildungseigenschaft der freien Gruppe gegeben. Um das Ganze für unsere Zwecke hilfreich hinzuschreiben, wollen wir pingelig zwischen $m \in M$ und dem ihm entsprechenden Element $\delta_M(m) \in F(M)$ unterscheiden. Wir merken uns dabei gleichzeitig, in welcher Menge m gerade betrachtet wird (es liegt natürlich in vielen Mengen…).

Das heißt: wir betrachten die Abbildung

$$\delta_M : M \longrightarrow V(F(M)),$$

wobei wir $V(F(M))$ schreiben, weil $F(M)$ ja keine Menge ist, also in der falschen Kategorie liegt.

Dann wird $\eta_{M,G}$ gegeben durch

$$\mathrm{Hom}(F(M), G) \ni \Phi \mapsto \eta_{M,G}(\Phi) := [m \mapsto \Phi(\delta_M(m))] = V(\Phi) \circ \delta_M.$$

Dass dies eine Bijektion ist, sagt uns die universelle Abbildungseigenschaft der freien Gruppe. Für festes M haben wir damit einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren $\mathrm{Hom}(F(M), -)$ und $\mathrm{Abb}(M, -) \circ V$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Mengen. Die Bijektivität der $\eta_{M,G}$ haben wir ja schon, und $\eta_{M,G}$ ist genau von der Form, wie von Yoneda gefordert:

$$\Phi \mapsto (\mathrm{Abb}(M, -)(V(\Phi)))(\delta_M) = V(\Phi) \circ \delta_M.$$

(Erinnerung: Man muss hier natürlich verwenden, was der Funktor $\mathrm{Abb}(M, -) \circ V$ mit einem Morphismus Φ macht. Er macht daraus eine Abbildung, die durch Komposition mit $V(\Phi)$ gegeben ist.)

Die Umkehrabbildung

$$\eta_{M,G}^{-1} : \mathrm{Abb}(M, V(G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(M), G)$$

ist gegeben durch

$$\mathrm{Abb}(M, V(G)) \ni \Psi \mapsto \Phi,$$

wobei $\Phi : F(M) \longrightarrow G$ gegeben ist durch $\Phi(\delta_M(m)) := \Psi(g)$ (und der dadurch eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus ist). Das schreiben wir jetzt um: Yoneda sagt, wir sollten uns hier um das Φ kümmern, das zur Identität auf $V(G)$ gehört. Diesen Homomorphismus nennen wir ε_G. Es ist also

$$\varepsilon_G : F(V(G)) \longrightarrow G,$$

der eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus mit

$$\varepsilon_G(\delta_{V(G)}(g)) := g.$$

Dann ist offensichtlich Φ im Allgemeinen von der Form

$$\Phi = \varepsilon_G \circ F(\Psi) = (\mathrm{Hom}(G, -)(F(\Psi)))(\varepsilon_G),$$

denn die rechte Seite schickt einen Erzeuger $\delta_M(m)$ der freien Gruppe $F(M)$ erst mithilfe von $F(\Psi)$ auf $\delta_{V(G)}(\Psi(m))$, und ε_G macht hieraus wieder $\Psi(m)$.

Es liegt also auch für festes G ein natürlicher Isomorphismus zwischen den Funktoren $\mathrm{Abb}(-, V(G))$ und $\mathrm{Hom}(-, G) \circ F$ vor, und damit sind die zwei Funktoren definitionsgemäß zueinander adjungiert (F links und V rechts).