Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

13.01.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 10

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V eine quasiprojektive Varietät über k und $x \in V$.

a) Sei weiter $\mathcal{O}_{V,x}$ der lokale Ring von V in x. Weiter sei für eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von x der in der Vorlesung eingeführte k-Algebren-Homomorphismus $\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_{V,x}, f \mapsto f_x = [(U, f)]$.

   Zeige, dass die ψ_x^U zusammen mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für offene $U' \subseteq U \subseteq V$ ein injektives System bilden. Zeige also:

   i) $\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \psi_x^U$ und

   ii) für jede k-Algebra A mit Homomorphismen $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ für offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x, so dass für alle offenen $U' \subseteq U$ stets $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ gilt, gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.

b) Sei nun $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten und U eine offene Umgebung von x in V.

   Zeige: Gilt für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$, dass $U \cap V_i = \emptyset$, so ist ψ_x^U injektiv.

Lösung:

a) i) Sei $f \in O_V(U)$: $(\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U)(f) = \psi_x^{U'}(f|_{U'}) = [(U', f|_{U'})] = [(U, f)] = \psi_x^U(f)$.

   ii) Sei A eine k-Algebra und für jedes $U \subseteq V$ offen, mit $x \in U$, ein k-Algebren-Homomorphismus $\varphi_x^U\colon \mathcal{O}_V(U) \to A$ gegeben, so dass $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ für alle offenen $U' \subseteq U$ mit $x \in U'$. Zu zeigen ist, dass es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ gibt, mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.
   Wegen $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$, muss $\Phi([(U, f)]) = \varphi_x^U(f)$ gelten. Das ist eindeutig! Zu zeigen bleibt, dass es auch wohldefiniert ist. Sei also $[(U, f)] = [(U', f')]$, dann ist $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$. Damit gilt auch $\varphi_x^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U}(f|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U}(f'|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^{U'}(f') = \varphi_x^{U'}(f)$.

b) Sei $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $\psi_x^U(f) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von x mit $f|_{U'} = 0$. Für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$ gilt $V_i \cap U' = \emptyset$ ($U' \subseteq U$). Für alle $i \in I$ mit $x \in V_i$ ist $x \in V_i \cap U'$, also ist $V_i \cap U' \neq \emptyset$ und da V_i irreduzibel ist, gilt $\overline{V_i \cap U'} = V_i$. Damit ist $f_{V_i \cap U} \equiv 0$ für alle V_i mit $V_i \cap U \neq \emptyset$. Es folgt, dass $f|_U \equiv 0$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Die Charakteristik von k sei $\neq 2$. Für die getwistete Kubik $V_1 = V(Y - X^2, Z - X^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ gilt bekanntlich $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Die Varietät $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ ist ein Doppelkegel.

Bestimme jeweils eine Basis des Tangentialraums $T_{V_i,p}$ für jeden Punkt $p = (a, b, c) \in V_i$.

Lösung:
Nach Übungsblatt 2 Aufgabe 2 ist $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Setze $f := Y - X^2$ und $g := Z - X^3$. Im Punkt $p = (a, b, c) \in V_1$ gilt $D_p(f) = -2aX + Y$ sowie $D_p(g) = -3a^2X + Z$ und damit
$$T_{V_1,p} = V(-2aX + Y, -3a^2X + Z) = \{(t, 2at, 3a^2t) \mid t \in k\}.$$
Eine Basis von $T_{V_1,p}$ ist zum Beispiel $\{(1, 2a, 3a^2)\}$.

Zu $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ bestimmen wir zunächst das Verschwindungsideal. Da $Y^2 - Z^2 = (Y - Z)(Y + Z)$ kein Quadrat in $k[Y, Z][X]$ ist, ist $h := X^2 + Y^2 - Z^2$ irreduzibel und $I(V_2) = (X^2 + Y^2 - Z^2)$. Für $p = (a, b, c) \in V_2$ gilt demnach $D_p(h) = 2aX + 2bY - 2cZ$. Ist $p = (0, 0, 0)$, so ist $D_p(h) \equiv 0$ und $T_{V_2,p} = k^3$ mit Basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Für $p \neq (0, 0, 0)$ ist $T_{V_2,p} = V(2aX + 2bY - 2cZ) = \{(x, y, z) \mid 2ax + 2by - 2cz = 0\}$ und hat als Basis $\{(b, -a, 0), (c, 0, a)\}$.

Aufgabe 4 *(Aufblasung der Ebene)* (6 Punkte)
Nun sei k algebraisch abgeschlossen und
$$X = \{((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \mid x_1y_2 = x_2y_1\}.$$
Man nennt X die *Aufblasung* von $\mathbb{A}^2(k)$ im Punkt $(0, 0)$. Außerhalb von $(0, 0)$ sieht X aus wie die affine Ebene, aber den Ursprung hat man zu einer projektiven Geraden „aufgeblasen". Die Punkte des $\mathbb{P}^1(k)$ entsprechen den Richtungen von Geraden durch den Nullpunkt.

Sei $\pi : X \to \mathbb{A}^2(k)$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Faser $E = \pi^{-1}((0, 0))$ über dem Ursprung nennt man *exzeptionelle Kurve* der Aufblasung. Für eine Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ mit $(0, 0) \in C$ heißt der Abschluss von $\pi^{-1}(C \setminus \{(0, 0)\})$ in X die *strikte Transformierte* von C.

Zeige:

a) X wird vermöge der Segre-Einbettung $\Psi : \mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^5(k)$ von Blatt 7 zu einer irreduziblen quasiprojektiven Varietät.

   Hinweis: Für die Irreduzibilität helfen b) und c).

   Lösung: In der Übung habe ich bereits gezeigt, dass X vermöge Ψ zu einer quasiprojektiven Varietät wird. Zu zeigen bleibt, dass X irreduzibel ist. $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$ ist irreduzibel, also nach b) auch $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0, 0)\}$. Es gilt $X = X_0 \cup E$. Wenn wir noch zeigen, dass $E \subseteq \overline{X_0}$ ist, dann ist $X = \overline{X_0}$ und somit irreduzibel. Sei dazu $p \in E$. Nach c) gibt es ein $M \subseteq X_0$ mit $p \in \overline{M}$. Mit $\overline{M} \subseteq \overline{X_0}$ folgt $E \subseteq \overline{X_0}$.

b) π ist ein surjektiver Morphismus, der $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0,0)\}$ isomorph auf $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ abbildet.

Lösung: In der Übung habe ich gezeigt, dass π ein surjektiver Morphismus ist. Was noch fehlt ist ein Umkehrmorphismus zu $\pi|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Setze

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\} & \to & X_0 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & ((x_1,x_2),(x_1 : x_2)) \end{cases}.$$

Wegen $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ und $x_1x_2 = x_2x_1$ ist $\text{Bild}(\sigma) \subseteq X_0$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Weiter gilt $(\sigma \circ \pi|_{X_0})((x_1,x_2),(y_1 : y_2)) = ((x_1,x_2),(x_1 : x_2))$. Aus $x_1y_2 = x_2y_1$ folgt mit $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, dass $(y_1 : y_2) = (x_1 : x_2)$ gilt. Es folgt $\sigma \circ \pi|_{X_0} = \text{id}\,|_{X_0}$. Die Gleichung $\pi|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}} \circ \sigma = \text{id}\,|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}}$ ist offensichtlich. Somit ist σ der gewünschte Umkehrabbildung.

Es bleibt zu zeigen, dass σ ein Morphismus ist. Dafür müssen wir (wie in b)) $\Psi \circ \sigma\colon\ \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\} \to \Psi(X_0) \subseteq \mathbb{P}^5(k)$ betrachten. Wobei wir $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ als Teilraum von $\mathbb{P}^2(k)$ betrachten.

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \sigma)(\overset{\neq 0}{x_0} : x_1 : x_2) &= (\psi \circ \sigma)\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2\right) \\ &= (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_1x_2 : x_2^2)\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\Psi \circ \sigma$ durch homogene Polynome vom Grad 2 gegeben ist, und folglich ein Morphismus ist.

c) Es sei $[v] \in \mathbb{P}^1(k)$ die Äquivalenzklasse von $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ und $L_v = \{tv \mid t \in k\}$ die Ursprungsgerade in Richtung v. Zeige, dass die strike Transformierte von L_v durch

$$\{(tv, [v]) \in X \mid t \in k\}$$

gegeben ist. Folgere, dass jeder Punkt in E im Abschluss einer Menge aus X_0 liegt.

Lösung: Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{L_v} := \overline{\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})} = \{(tv,[v]) \in X \mid t \in k\} =: H$. Definiere dazu die Abbildung $h\colon\ \mathbb{A}^1(k) \to X, t \mapsto (tv,[v])$, mit Bild H. Diese Abbildung ist ein Morphismus, denn $(\Psi \circ h)(t) = (v_1 : v_2 : tv_1^2 : tv_1v_2 : tv_1v_2 : tv_2^2)$ oder genauer $(\Psi \circ h)(\overset{\neq 0}{t_0} : t_1) = (t_0v_2 : t_0v_2 : t_1v_1^2 : t_1v_1v_2 : t_1v_1v_2 : t_1v_2^2)$. $\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel und damit auch $\text{Bild}(\Psi \circ h)$.

Behauptung: $\text{Bild}(\Psi \circ h) = \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$ (daraus folgt dann insbesondere, dass $\text{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist).

Beweis der Behauptung: Die Inklusion "$\subseteq$" ist klar. Sei umgekehrt $z \in \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$. Dann sind (v_1,v_2) und (z_0,z_1) linear abhängig und wegen a) gilt $z = (z_0 : z_1 : \tau z_0^2 : \tau z_0z_1 : \tau z_0z_1 : \tau z_1^2)$ mit $\tau \in k$ geeignet. Damit liegt z in $\text{Bild}(\Psi \circ h)$.

Es gilt $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})) = (\Psi \circ \sigma)(L_v \setminus \{(0,0)\}) = \{(v_0 : v_1 : tv_0^2 : tv_0v_1 : tv_0v_1 : tv_1^2) \mid t \in k\}$. Somit ist $\text{Bild}(\Psi\circ h) = \Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})) \cup \{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ und weil $\text{Bild}(\Psi\circ h)$ irreduzibel ist und $\{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ abgeschlossen, muss $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\}))$ offen sein. Da $\text{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist folgt $\Psi(\widetilde{L_v}) = \text{Bild}(\psi \circ h) = \Psi(H)$.

Es bleibt zu folgern, dass für alle $p \in E = \pi^{-1}((0,0))$ ein $M \subseteq X_0$ existiert mit $p \in \overline{M}$:

Sei $((0,0),[v]) \in E$, also $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist $\widetilde{L_v} \cap E = \{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\} \overset{\Psi^{-1}}{\to} \{((0,0),[v])\}$, also ist $((0,0),[v])$ im Abschluss von $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})$ enthalten und $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\}) \subseteq X_0$.

d) Durch Aufblasen kann man algebraische Varietäten desingularisieren. Im einfachsten Fall sieht eine Singularität zum Beispiel wie der Punkt $(0,0)$ des Achsenkreuzes $V(XY) \subset \mathbb{A}^2(k)$ aus.

Zeige, dass sich die strikten Transformierten der x- und der y-Achse in X nicht mehr schneiden.

Lösung: Nach c) gilt $\widetilde{L_{(1,0)}} = \{((t,0),(1:0)) \mid t \in k\}$ und $\widetilde{L_{(0,1)}} = \{((0,t),(0:1)) \mid t \in k\}$. Die Gleichung $\widetilde{L_{(1,0)}} \cap \widetilde{L_{(0,1)}} = \emptyset$ ist offensichtlich erfüllt.

e) Eine weitere Verwendung der Aufblasung besteht darin, aus rationalen Abbildungen Morphismen zu machen. Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k)\,, \quad (x_1,x_2) \mapsto (x_1 : x_2).$$

Zeige, dass ein Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(k)$ existiert, so dass $\tilde{\varphi}(x) = \varphi \circ \pi(x)$ für alle $x \in X_0$ gilt.

Lösung: Wir definieren

$$\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(K)\,, \quad ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \mapsto (y_1:y_2).$$

Zunächst sollte man sich klarmachen, dass $\tilde{\varphi}$ wirklich ein Morphismus (für die von Ψ induzierte Struktur als quasiprojektive Varietät) ist. Es gilt

$$\tilde{\varphi} \circ \Psi^{-1} : \Psi(X) \to \mathbb{P}^1(K)\,, \quad z = (z_0 : \ldots : z_5) \mapsto (z_0 : z_1),$$

was auf $D(Z_0) \cup D(Z_1) \supset \Psi(X)$ wohldefiniert ist.

$\tilde{\varphi}$ setzt φ fort, denn sei $p = ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \in X_0$. Dann sind wegen $x_1y_2 = x_2y_1$ die Vektoren (x_1,x_2) und (y_1,y_2) linear abhängig und beide $\neq (0,0)$, also gilt

$$\varphi \circ \pi(p) = \varphi(x_1,x_2) = (x_1:x_2) = (y_1:y_2) = \tilde{\varphi}(p).$$