Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

13.1.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 11

Aufgabe 0 (1 Punkt)
Um das neue Jahr zu feiern, bekommt jeder, der abgibt, einen Punkt geschenkt.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei R ein Ring und $D\colon R[X] \to R[X]$ die Ableitung d/dX, d.h. D ist gegeben durch $D(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$. Zeige, dass D eine Derivation ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei R ein Ring, A eine R-Algebra. Mit $\underline{A\text{-Mod}}$ bezeichnen wir die Kategorie der A-Moduln.

a) Wir werden zeigen, dass der Funktor von $\underline{A\text{-Mod}}$ nach $\underline{A\text{-Mod}}$ mit $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ darstellbar ist.

   Betrachte dazu den freien A-Modul F mit der Basis A, wobei X_f das Basiselement zu $f \in A$ bezeichne. Weiter sei U der Untermodul von F, der von allen $X_{f+g} - X_f - X_g$, $X_{\lambda f} - \lambda X_f$ und $X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f$ für $f, g \in A$ und $\lambda \in R$ erzeugt wird.

   Zeige, dass der sogenannte *Differentialmodul* $\Omega_{A/R} := F/U$ zusammen mit $d\colon A \to \Omega_{A/R}$, $f \mapsto \overline{X_f} =: df$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

   Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation $\delta\colon A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi\colon \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

b) Zeige, dass für $A = R[X_1, \dots, X_n]$ der Differentialmodul $\Omega_{A/R}$ ein freier Modul mit Basis $dX_1, \dots, dX_n$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ die Krulldimension 2 hat.

Hinweis: Wie viele Erzeuger benötigt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} \neq \{0\}$ höchstens, wie viele benötigt eines mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ höchstens?

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik ungleich 2. Es sei

$$\mathrm{SO}(2) = \{A \in k^{2\times 2} \mid \det(A) = 1\ ,\ A^{-1} = A^T\}.$$

a) Zeige, dass SO(2) eine affine Varietät ist und bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\mathrm{SO}(2))$. Ist SO(2) irreduzibel?

b) Bestimme die lokale Dimension $\dim_A \mathrm{SO}(2)$ für einen Punkt $A \in \mathrm{SO}(2)$.

Abgabe bis Freitag, den 20.1.2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.