

## Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 11

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein Ring,  $A$  eine  $R$ -Algebra. Mit  $A$ -Mod bezeichnen wir die Kategorie der  $A$ -Moduln.

- a) Wir werden zeigen, dass der Funktor von  $A$ -Mod nach  $A$ -Mod mit  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  darstellbar ist.

Betrachte dazu den freien  $A$ -Modul  $F$  mit der Basis  $A$ , wobei  $X_f$  das Basiselement zu  $f \in A$  bezeichne. Weiter sei  $U$  der Untermodul von  $F$ , der von allen  $X_{f+g} - X_f - X_g$ ,  $X_{\lambda f} - \lambda X_f$  und  $X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f$  für  $f, g \in A$  und  $\lambda \in R$  erzeugt wird.

Zeige, dass der sogenannte *Differentialmodul*  $\Omega_{A/R} := F/U$  zusammen mit  $d: A \rightarrow \Omega_{A/R}$ ,  $f \mapsto \overline{X_f} =: df$  folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

Zu jedem  $A$ -Modul  $M$  und jeder  $R$ -Derivation  $\delta: A \rightarrow M$  existiert genau eine  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi: \Omega_{A/R} \rightarrow M$  mit  $\delta = \varphi \circ d$ .

- b) Zeige, dass für  $A = R[X_1, \dots, X_n]$  der Differentialmodul  $\Omega_{A/R}$  ein freier Modul mit Basis  $dX_1, \dots, dX_n$  ist.

### Lösung:

b) In der Übung bin ich bei der linearen Unabhängigkeit der  $dX_i$  ins Straucheln gekommen, deshalb hier jetzt noch mal der richtige Beweis dazu:

Seien  $a_1, \dots, a_n \in A = R[X_1, \dots, X_n]$  und  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  in  $\Omega_{A/R}$ .

Zu zeigen ist, dass dann schon alle  $a_i$  gleich 0 sind.

Wir betrachten die Derivationen  $\frac{\partial}{\partial X_j}: R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R[X_1, \dots, X_n]$ . Nach a) existiert jeweils ein eindeutiges  $R[X_1, \dots, X_n]$ -lineares  $\varphi_j: \Omega_{A/R} \rightarrow R[X_1, \dots, X_n]$  mit  $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$ .

Aus  $\sum_{i=1}^n a_i dX_i = 0$  folgt  $0 = \varphi_j(\sum_{i=1}^n a_i dX_i) \stackrel{\varphi_j \text{ A-linear}}{=} \sum_{i=1}^n a_i \varphi_j(d(X_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i) = a_j$ .