Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

20.1.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 12

Auf diesem Blatt bezeichne k (fast) immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Es sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass $I(V(f)) = (f)$ genau dann gilt, wenn f quadratfrei ist, d.h. wenn kein irreduzibler Faktor von f mehrfach vorkommt.

b) Ist $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom, das nicht quadratfrei ist, so enthält

$$V(f, \frac{\partial}{\partial X_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} f)$$

eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n(k)$.

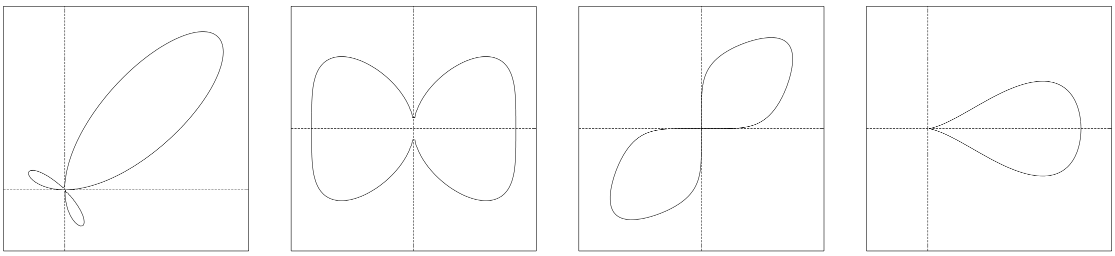
Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Bestimme die singulären Punkte der folgenden affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$ bzw. in $\mathbb{A}^3(k)$:

$$V(X^4 + Y^4 - X^2) \qquad V(X^6 + Y^6 - XY)$$
$$V(X^4 + Y^4 + Y^2 - X^3) \qquad V(X^4 + Y^4 - X^2Y - XY^2)$$
$$V(XY^2 - Z^2)$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung der Verschwindungsideale.

b) Nun sei $k = \mathbb{R}$. Welche der obigen Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ gehört zu welchem Bild?



Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für diese Aufgabe habe der Körper k die Charakteristik 0. Sei V eine projektive Hyperfläche in $\mathbb{P}^n(k)$, d.h. $V = V(f)$ für ein homogenes, quadratfreies Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n] \setminus k$.

a) Zeige, dass $f \in k[X_0, \ldots, X_n] \setminus k$, homogen vom Grad d, die folgende Differentialgleichung (von Euler) erfüllt: $\sum\limits_{j=0}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial X_j} = d \cdot f$.

b) Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann singulär, wenn $\frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0$ für $j = 0, \ldots, n$.

c) Bestimme die singulären Punkte der Bernoullischen Lemniskate

$$B := V((X^2 + Y^2)^2 - 2(Y^2Z^2 - X^2Z^2)) \subseteq \mathbb{P}^2(k)\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Charakteristik von k sei weder 2 noch 3. Für $\lambda \in k$ betrachten wir die Kurve $E_\lambda = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$.

a) Für welche λ ist E_λ singulär?
Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung von $I(E_\lambda)$.

b) Bestimme den projektiven Abschluss $\overline{E_\lambda}$ von E_λ und untersuche, ob er singuläre Punkte enthält.

c) Was passiert für $\mathrm{char}(k) = 2$ oder 3?

Abgabe bis Freitag, den 27.1.2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.