

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 13

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien X und Y quasiprojektive Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils Deine Antwort.

- a) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cap Y$ nichtsingulär.
- b) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cup Y$ nichtsingulär.
- c) X, Y singulär $\Rightarrow X \cap Y$ singulär.
- d) X, Y singulär $\Rightarrow X \cup Y$ singulär.
- e) $\emptyset \neq \text{Sing}(Y) \subsetneq X \cap Y \Rightarrow X \cap Y$ ist singulär.

Hinweis: Alle notwendigen Gegenbeispiele können im affinen Raum gefunden werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f \in k[X, Y] \setminus k$ ein quadratfreies Polynom und $V = V(f)$. Für einen Punkt $p \in V(f)$ definieren wir die Vielfachheit $\mu_p(V)$ in p folgendermaßen:

Es sei $\varphi: \mathbb{A}^2(k) \rightarrow \mathbb{A}^2(k)$ eine Translation (d.h. $\varphi(x) = x + t$ für ein $t \in k^2$), so dass $\varphi(p) = (0, 0)$ gilt. Wir schreiben $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ als Summe seiner homogenen Komponenten

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \cdots + \tilde{f}_d.$$

Dann sei $\mu_p(V) = \min\{r \in \mathbb{N}_0 \mid \tilde{f}_r \neq 0\}$.

Zeige, dass p genau dann ein singulärer Punkt von V ist, wenn $\mu_p(V) > 1$ gilt.

Bestimme die Vielfachheiten der Singularitäten der Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 12.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Charakteristik von k sei 0. Für ein nichtkonstantes Polynom $f \in k[X]$ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $C := V(Y^n - f) \subset \mathbb{A}^2(k)$.

Für welche n und f ist C eine nichtsinguläre Kurve?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien I_1, \dots, I_n Ideale in einem Ring R und $J \subseteq R$ ein Ideal mit $J \not\subseteq I_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Zeige, dass auch $J \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ gilt, falls mindestens $n - 2$ der Ideale I_i Primideale sind.

Abgabe bis Freitag, den 3.2.2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.