Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie 3.2.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 14

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein nullteilerfreier, noetherscher Ring mit Quotientenkörper $K \neq R$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) R ist ein diskreter Bewertungsring.

ii) Für jedes $x \in K$ gilt $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

iii) Die Menge der Hauptideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.

iv) Die Menge aller Ideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.

v) R ist ein lokaler Hauptidealring.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Die Charakteristik von k sei nicht 2. Wir betrachten $C = V(Y^4 - XZ(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$.

a) Zeige, dass C eine nichtsinguläre Kurve ist.

b) Es sei $h : C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Bestimme den Grad von h und für jeden Punkt $P \in C$ den Verzweigungsindex $e_P(h)$.

c) Bestimme die Divisoren der rationalen Funktionen x/z und $x/y \in k(C)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve und $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so dass $C \not\subset V(G)$ gilt. Wir definieren den Schnittdivisor $\operatorname{div}(G)$ zu G folgendermaßen: Für einen Punkt $P \in C$ wählen wir ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $H(P) \neq 0$ und $\deg(H) = \deg(G)$ und setzen $n_P = \operatorname{ord}_P(G/H)$. Dann sei $\operatorname{div}(G) = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$.

a) Zeige, dass $\operatorname{div}(G)$ wohldefiniert ist.

b) Sei nun $G_1, G_2 \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $\deg(G_1) = \deg(G_2)$. Zeige, dass die zwei Schnittdivisoren $\operatorname{div}(G_1)$ und $\operatorname{div}(G_2)$ linear äquivalent sind.

c) Es sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Bestimme für $C = V(Y^2Z - X(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$ die Schnittdivisoren von X, Y und Z. Welche geometrische Bedeutung haben diese Divisoren?

d) Der Grad d von C sei der Grad des Schnittdivisors eines homogenen Polynoms von Grad 1. Zeige: Ist $n = 2$ und $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom $F \in k[X_0, X_1, X_2]$, so gilt $\deg(F) = d$.

   Hinweis: Man kann ohne Einschränkung voraussetzen, dass $(0:0:1) \notin V(F)$. *(Wieso?) Dann hilft es, den Morphismus* $C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x:y:z) \mapsto (x:y)$ *zu betrachten.*

e) Zeige eine Version des Satzes von Bézout für nichtsinguläre Kurven: Ist $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom von Grad e, so dass $C \not\subset V(G)$, und ist d wieder der Grad von C, so gilt

$$\deg(\operatorname{div}(G)) = d \cdot e.$$

Abgabe bis Freitag, den 10.2.2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.