Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

4.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 3

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^\top \overline{A} = I_n\}$ die unitäre Gruppe.

a) Zeige, dass $U(n)$ keine komplexe affine Varietät in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.

b) Zeige, dass $U(n)$ dafür aber eine reelle affine Varietät ist, wenn wir $\mathbb{C}^{n\times n}$ auf die naheliegende Weise mit $\mathbb{R}^{2n^2}$ identifizieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Weiter seien $g, h \in k[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome, wobei h keine Nullstelle in V habe.

Zeige, dass die Abbildung $\frac{g}{h} : V \to \mathbb{A}^1(k)$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist. Gilt das auch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $V_1 = V(Y^2 - X)$ und $V_2 = V(XY - 1)$ affine Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$.

Ist der Koordinatenring von V_1 bzw. V_2 isomorph zum Polynomring in einer Variablen? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $C = V(Y^2 - X^2(X-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.

a) Zeige, dass es einen surjektiven Morphismus $\phi : \mathbb{A}^1(k) \to C$ gibt.

b) Gibt es auch einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{A}^1(k) \to C$?

c) Ist C homöomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$?

Abgabe bis Freitag, den 11.11.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.