Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

11.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, A und B zwei k-Algebren, B endlich erzeugt und $\varphi\colon A \to B$ ein k-Algebrenhomomorphismus.

Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals in B unter φ ein maximales Ideal in A ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für B die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall\, U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X: $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''} = \rho_U^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
  - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
  - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i\cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i\cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_*\mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von $\mathcal{F}$.)

Bitte wenden!

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

Zeige: Der k-Algebrenhomomorphismus $\rho\colon k[V] \to \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$ ist genau dann injektiv, wenn U dicht in V liegt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $U = \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Bestimme den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2(k)}(U)$. Folgere, dass U nicht isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Es seien V eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen und $g \in \mathcal{O}_V(U)$.
Zeige, dass $W := \{x \in U : g(x) = 0\}$ abgeschlossen in U ist.

Abgabe bis Freitag, den 18.11.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.