Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

18.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 4

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall\ U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X: $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''} = \rho_U^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
  - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
  - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i \cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i \cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_* \mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von $\mathcal{F}$.)

Lösung:
Für offene Mengen $U \subseteq V \subseteq Y$ sind $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y) = X$ offen in X. Wir können also Restriktionsabbildungen definieren als $\sigma_U^V = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Es gilt:

- $\sigma_U^U = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = \mathrm{id}_{f_* \mathcal{F}(U)}$
- Seien $U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in Y, dann ist $\sigma_U^{U'} \circ \sigma_{U'}^{U''} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U')} \circ \rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U'')} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U'')} = \sigma_U^{U''}$.
- Sei $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$.
  - Für $h \in f_* \mathcal{F}(V)$ mit $\sigma_{V_i}^V(h) = 0$ für alle $i \in I$ gilt dann auch $\rho_{f^{-1}(V_i)}^{f^{-1}(V)}(h) = 0$ für alle $i \in I$. Außerdem ist $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, ist somit $h = 0$.

- Sind $h_i \in f_* \mathcal{F}(V_i)$ gegeben mit $\sigma^{V_i}_{V_i \cap V_j}(h_i) = \sigma^{V_j}_{V_i \cap V_j}(h_j)$ für alle Paare von i und j aus I, dann gilt auch $\rho^{f^{-1}(V_i)}_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}(h_i) = \rho^{f^{-1}(V_j)}_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}(h_j)$. Wegen $f^{-1}(V_i \cap V_j) = f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j)$ und der Garbeneigenschaften von $\mathcal{F}$ existiert dann ein $h \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* \mathcal{F}(V)$ mit $\sigma^V_{V_i}(h) = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(h) = h_i$ für alle $i \in I$.