Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

25.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 5

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Die Aussage in Aufgabe 1 gilt nicht nur für affine Varietäten, sondern allgemeiner für topologische Räume. Deshalb hier nochmal die Lösung der allgemeineren Aufgabe 1:

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei V ein topologischer Raum und $U, \tilde{U}$ dichte, offene Teilmengen von V. Zeige, dass auch ihr Schnitt eine dichte, offene Teilmenge von V ist.

Lösung:
Angenommen $U \cap \tilde{U}$ wäre nicht dicht in V. Dann wäre $W := \overline{U \cap \tilde{U}} \subsetneq V$. Da U und $\tilde{U}$ dicht in V liegen, liegt weder U noch $\tilde{U}$ komplett in W. Es gilt:

$$U = (U \cap \tilde{U}) \cup (U \cap (V \setminus \tilde{U})) \subseteq (U \cap \tilde{U}) \cup (V \setminus \tilde{U}) \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U})$$

Die Menge $\tilde{U}$ ist dicht in V, kann also nicht in W enthalten sein und natürlich ist $\tilde{U} \cap (V \setminus \tilde{U}) = \emptyset$, also gilt $\tilde{U} \nsubseteq W \cup V \setminus \tilde{U}$ und damit $W \cup V \setminus \tilde{U} \neq V$. Es folgt $\overline{U} \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U}) \subsetneq V$, was im Widerspruch zu $\overline{U} = V$ steht.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Der algebraisch abgeschlossene Körper k habe nun Charakteristik 0. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$, $V = V(X^a - Y^b) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und $\Phi\colon\ \mathbb{A}^1(k) \to V$, $t \mapsto (t^b, t^a)$. Diskutiere folgende Punkte in Abhängigkeit von a und b:

- Wann ist Φ injektiv, wann surjektiv und wann ein Isomorphismus?
- Zerlege V in irreduzible Komponenten.
- Bestimme, wann Φ eine birationale Abbildung ist.

Hinweis: Betrachte den größten gemeinsamen Teiler d von a und b.

Lösung:
Sei $d := \mathrm{ggT}(a,b)$, $\alpha := a/d$ und $\beta := b/d$. In der Übung haben wir bereits eingesehen, dass Φ genau dann injektiv ist, wenn $d = 1$ und genau dann surjektiv ist, wenn $d = 1$.

Wann ist Φ ein Isomorphismus?
Jeder Isomorphismus ist bijektiv, also brauchen wir mindestens $d = 1$. Ein bijektives Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $f \in k[X,Y]$ existiert mit $\Phi^{-1}(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in V$. Wenn ein solches f existiert, dann gilt $f(\Phi(t)) = t$ und nach Satz 4 auch $(f \circ \Phi)^\sharp = \mathrm{id}^\sharp$, d.h. $T = f(T^a, T^b) \in k[T]$. Da T Grad 1 hat, hat auch $f(T^a, T^b)$ Grad 1, was $a = 1$ oder $b = 1$ zur Folge hat.

Für $a = 1$ ist $\Phi^{-1}(x,y) = y$, für $b = 1$ gilt $\Phi^{-1}(x,y) = x$.

Somit gilt: Φ ist genau für $a = 1$ oder $b = 1$ ein Isomorphismus.

Zerlegung von V in irreduzible Komponenten:
Sei ξ eine primitive d-te Einheitswurzel in k. In $k[T,U]$ gilt $T^d - U^d = \prod_{k=0}^{d-1}(T - \xi^k U)$, denn die $\xi^k U$ sind d paarweise verschiedene Nullstellen von $T^d - U^d \in k[T]$ und $\deg_T(T^d - U^d) = d$.

Damit gilt $V = V(X^a - Y^b) = V(X^{\alpha d} - Y^{\beta d}) = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$. Sei $V_k := V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$.

Man rechnet schnell nach, dass das folgende topologische Lemma gilt.

Lemma: Sind V, W topologische Räume, $\Phi\colon V \to W$ stetig und V irreduzibel, dann ist auch W irreduzibel.

Da die Abbildung $t \mapsto (t^\beta, t^\alpha)$ ein surjektiver Morphismus von $\mathbb{A}^1(k)$ nach V_0 ist (α und β sind teilerfremd) und $\mathbb{A}^1(k)$ irreduzibel ist, ist auch V_0 irreduzibel.

Die Morphismen $V_k \to V_0$, $(x,y) \mapsto (\xi^{-ku}x, \xi^{kv}y)$ und $V_0 \to V_k$, $(x,y) \mapsto (\xi^{ku}x, \xi^{-kv}y)$ sind wohldefiniert (man rechne nach, dass das Bild tatsächlich in V_0 bzw. V_k liegt) und invers zueinander. Also ist $V_0 \cong V_k$ und somit sind alle V_k irreduzibel. Des weiteren sind die V_k paarweise nicht ineinander enthalten, da $V_i \cap V_j = \{0\}$ für $i \neq j$.

Damit haben wir gezeigt, dass $V = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten ist.

Wann ist Φ birational?
In der Übung haben wir bereits gesehen, dass V irreduzibel sein muss, falls Φ birational ist. Aus der obigen Zerlegung von V folgt also, dass $d = 1$ gelten muss. Ist nun umgekehrt $d = 1$, dann sind a und b teilerfremd, also existierten $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass $ua + vb = 1$ ist. Somit gilt $t = t^{ua+vb} = (t^a)^u (t^b)^v$ und damit ist $\Psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k), (x,y) \mapsto (y^u x^v)$ (definiert auf $D(y) \cap D(x)$) eine Inverse zu Φ in der Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten mit dominanten rationalen Abbildungen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Zeige: Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert auf $\mathbb{P}^1(k)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (ax + by : cx + dy).$$

Dabei operiert das Zentrum $Z(\mathrm{GL}_2(k)) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in k^\times\}$ trivial, d.h. obige Operation definiert auch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(k) = \mathrm{GL}_2(k)/Z(\mathrm{GL}_2(k))$ auf $\mathbb{P}^1(k)$.

Für paarweise verschiedene Punkte $P_1 = (x_1 : y_1), \ldots, P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ ist das Doppelverhältnis gegeben durch

$$DV(P_1, \ldots, P_4) := \left(\frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2} \right).$$

b) Zeige: Das Doppelverhältnis ist invariant unter $\mathrm{PGL}_2(k)$, d.h. für jedes $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ ist $DV(P_1, \ldots, P_4) = DV(g(P_1), \ldots, g(P_4))$.

c) Zeige: $\mathrm{PGL}_2(k)$ operiert dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$ gibt es stets ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(Q_1), g(Q_2), g(Q_3)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$.

Lösung:

a) Zunächst rechnen wir nach, dass $\cdot$ eine Gruppenoperation definiert:
Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (x : y)$, sowie

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (a'x + b'y : c'x + d'y) \\
&= (a(a'x + b'y) + b(c'x + d'y) : c(a'x + b'y) + d(c'x + d'y)) \\
&= ((aa' + bc')x + (ab' + bd')y : (ca' + dc')x + (cb' + dd')y)) \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \cdot (x : y)
\end{aligned}$$

Die Operation ist wohldefiniert, denn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\lambda x : \lambda y) = (a\lambda x + b\lambda y : c\lambda x + d\lambda y) = (ax + by : cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y)$ für alle $\lambda \in k^\times$.

Das Zentrum von $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert trivial auf $\mathbb{P}^1(k)$, denn für alle $a \in k^\times$ ist $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (x : y) = (ax : ay) = (x : y)$.

b) Seine $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3)$, $P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ und $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(k)$.
$DV(g(P_1), \ldots, g(P_4)) = \left(\frac{(ax_1+by_1)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_2+dy_2)} : \frac{(ax_1+by_1)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_2+dy_2)} \right) = \left(\frac{(ad-bc)(x_1y_3-x_3y_1)}{(ad-bc)(x_2y_3-x_3y_2)} : \frac{(ad-bc)(x_1y_4-x_4y_1)}{(ad-bc)(x_2y_4-x_4y_2)} \right) = \left(\frac{x_1y_3-x_3y_1}{x_2y_3-x_3y_2} : \frac{x_1y_4-x_4y_1}{x_2y_4-x_4y_2} \right) = DV(P_1, \ldots, P_4)$

c) Wir suchen zunächst für paarweise verschiedene $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3) \in \mathbb{P}^1(k)$ ein $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $g \cdot (1:0) = (x_1 : y_1)$, $g \cdot (0:1) = (x_2 : y_2)$ und $g \cdot (1:1) = (x_3 : y_3)$.

Es ist $g \cdot (1 : 0) = (a : c)$, $g \cdot (0 : 1) = (b : d)$ und $g \cdot (1 : 1) = (a + b : c + d)$, wir suchen also $a, b, c, d \in k$, $ad - bc \neq 0$ und $\lambda, \mu, \nu \in k^\times$ mit $a = \lambda x_1$, $c = \lambda y_1$, $b = \mu x_2$, $d = \mu y_2$, $a + b = \nu x_3$, $c + d = \nu y_3$. Das LGS können wir umformen zu $(x_1 y_2 - x_2 y_1)\lambda + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\nu = 0$ und $(x_1 y_2 - x_2 y_1)\mu + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\nu = 0$. Da die P_i paarweise verschieden sind, lässt sich das LGS nichttrivial lösen. Wähle ein beliebiges $\nu \neq 0$, dann sind auch $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ und $ad - bc = \lambda x_1 \mu y_2 - \mu x_2 \lambda y_1 = \lambda\mu(x_1 y_2 - x_2 y_1) \neq 0$. Somit haben wir ein passendes g gefunden.

Für $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$, je paarweise verschiedene Punkte, gibt es somit ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ und ein $g' \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g'(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$. Die Verkettung $g' \circ g^{-1} \in \mathrm{PGL}_2(k)$ bildet dann (Q_1, Q_2, Q_3) auf (Q_1', Q_2', Q_3') ab.