Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

2.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei k ein beliebiger(!) Körper und $n \geq 1$. Für einen Untervektorraum $U \subseteq k^{n+1}$ sei $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von U. Falls $\dim_k U = 2$, so nennt man $\mathbb{P}(U)$ auch eine *Gerade*. Zeige:

a) $\mathbb{P}(U)$ ist eine projektive Varietät.

b) In $\mathbb{P}^2(k)$ haben zwei Geraden immer einen nichtleeren Durchschnitt.

c) Zwei Punkte $a, b \in \mathbb{P}^n(k), a \neq b$ liegen auf einer eindeutig bestimmten Geraden. Diese werde mit $\overline{ab}$ bezeichnet.

d) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 3 Punkte.

e) Wenn $a, b, c, d \in \mathbb{P}^n(k)$ paarweise verschiedene Punkte sind, so folgt aus $\overline{ab} \cap \overline{cd} \neq \emptyset$, dass auch $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$ gilt.

Lösung:

a) Ziel: Um zu zeigen, dass $\mathbb{P}(U)$ eine projektive Varietät ist stellen wir U als Kern einer Abbildung $x \mapsto Ax$ mit $A = (a_{ij}) \in k^{m \times n+1}$ dar. Dann ist $U = V(\{\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}X_j \mid i = 1, \ldots, m\})$.

Sei $b_1, \ldots, b_l$ eine Basis von U. Ergänze sie zu einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ von k^{n+1}. Dann ist U Kern von

$$\Phi : \begin{cases} k^{n+1} & \to \quad k^{n+1} \\ \quad b_i & \mapsto \quad 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, l \\ \quad b_j & \mapsto \quad b_j \qquad \text{für } j = l+1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

Die Matrix zu Φ bezüglich der Basis B ist $A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Sei M die Basiswechselmatrix von der Standardbasis zu B. Dann erfüllt $A := A_\Phi \cdot M$ wie gewünscht $\operatorname{Kern} A = U$.

b) Die Lösung zu b) haben wir bereits in der Übung gesehen.

c) Seien $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$. Zu zeigen ist, dass a und b auf einer eindeutigen Geraden liegen.

Aus $a \neq b$ und $\dim_k(a) = \dim_k(b) = 1$ folgt, dass $a \cap b = \{0\}$. Mit der Dimensionsformel folgt dann $\dim_k(a+b) = 1+1-0 = 2$. $\mathbb{P}(a+b)$ ist also eine Gerade, die a und b enthält. Die Gerade ist eindeutig, da $a+b$ der kleinste Untervektorraum von k^{n+1} ist, der sowohl a als auch b enthält und da $a+b$ schon Dimension 2 hat.

d) Sei $\mathbb{P}(U)$ eine Gerade und $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von U. Dann sind b_1, b_2 und $b_1 + b_2$ paarweise linear unabhängig, definieren also 3 unterschiedliche Punkte in $\mathbb{P}(U)$.

e) Es sei $a = \mathbb{P}(U_1)$, $b = \mathbb{P}(U_2)$, $c = \mathbb{P}(U_3)$ und $d = \mathbb{P}(U_4)$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^n(k)$. Dann gilt laut Voraussetzung $\dim_k((U_1+U_2) \cap (U_3+U_4)) \geq 1$. Unser Ziel ist zu zeigen, dass auch

$$\dim_k((U_1+U_3) \cap (U_2+U_4)) \geq 1$$

ist. Dazu benutzen wird die Dimensionsformel. Es gilt

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1+U_2+U_3+U_4) \\ = \; & \dim_k(U_1+U_2) + \dim_k(U_3+U_4) - \dim_k((U_1+U_2) \cap (U_3+U_4)) \\ \leq \; & 2+2-1 = 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1+U_2+U_3+U_4) \\ = \; & \dim_k(U_1+U_3) + \dim_k(U_2+U_4) - \dim_k((U_1+U_3) \cap (U_2+U_4)) \\ = \; & 2+2-\dim_k((U_1+U_3) \cap (U_2+U_4)), \end{aligned}$$

woraus insgesamt $\dim_k((U_1+U_3) \cap (U_2+U_4)) \geq 1$ folgt. Also ist $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$.

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $I \trianglelefteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige:

Das Ideal I ist genau dann ein Primideal, wenn für beliebige homogene Elemente $f, g \in S$ aus $fg \in I$ folgt, dass $f \in I$ oder $g \in I$.

Lösung:
Die Implikation von links nach rechts ist klar. Es gelte also umgekehrt die rechte Seite und es seien $f, g \in S$ mit $fg \in I$. Zu zeigen ist, dass $f \in I$ oder $g \in I$. Wir zerlegen f und g in homogene Summanden:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i\,, \quad g = \sum_{j=0}^{e} g_j \text{ und setzen } \forall i > d, j > e : f_i = g_j = 0.$$

Dann ist $fg = \sum_{i,j} f_i g_j = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l}$. Da I homogen ist und $fg \in I$ müssen alle ihre homogenen Summanden in I liegen. Also gilt für alle $k = 0, \dots, d+e$

$$\sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l} \in I.$$

Angenommen $f \notin I$. Dann liegt auch ein homogener Summand nicht in I. Also gibt es ein minimales L mit $f_L \notin I$. Es gilt nun

$$I \ni \sum_{l=0}^{L} f_l g_{L-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L-l} + f_L g_0\,,$$

und da die vordere Summe der rechten Seite in I liegt, muss $f_L g_0$ in I liegen. Dies ist nun ein Produkt von homogenen Elementen, also liegt einer der Faktoren in I. Folglich ist $g_0 \in I$.

Um einzusehen dass auch $g_i \in I$ für $i \neq 0$ gilt, machen wir Induktion. Die obigen Überlegungen sind unser Induktionsanfang und als Induktionsvoraussetzung gelte für $K \geq 0$: $g_i \in I$ für alle $i < K$. Es ist

$$\sum_{l=0}^{L+K} f_l g_{L+K-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L+K-l} + f_L g_K + \sum_{l=L+1}^{L+K} f_l g_{L+K-l}.$$

Die linke Seite ist in I, genauso wie die vordere und hintere Summe der rechten Seite, einmal aufgrund der Wahl von L, einmal aufgrund unserer Induktionsvoraussetzung. Also ist $f_L g_K$ in I und wie oben folgt $g_K \in I$.

Das zeigt $g \in I$; somit ist I ein Primideal.