Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

9.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 8

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Inzwischen wissen wir, was Morphismen in der Kategorie der projektiven Varietäten sind. Darum hier noch einmal Aufgabe 2 von Übungsblatt 6:

Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. die Menge aller Isomorphismen $\varphi\colon\ \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k)$.

Tipp: Benutze Aufgabe 4 von Übungsblatt 5.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ ein Morphismus. Zeige, dass es homogene Polynome $f_0, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ gibt, alle vom gleichen Grad, mit

$$\varphi(x) = (f_0(x) : \ldots : f_m(x))$$

für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Der Nikolaus hat dir und deiner Schwester je eine nichtleere, irreduzible, projektive Varietät im $\mathbb{P}^n(k)$ geschenkt. Deine ist isomorph zu einer affinen Varietät, die deiner Schwester besteht nur aus einem Punkt. Doch der Nikolaus behauptet, dass er keinen von Euch benachteiligt hat. Wieso?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 *Veronese-Einbettung* (7 Punkte)
Es seien $M_0, M_1, \dots, M_{N(d)}$ die Monome von Grad d in $k[X_0, \dots, X_n]$. (Hierbei ist $N(d) = \binom{n+d}{d} - 1$.) Der Morphismus

$$\rho_d : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^{N(d)}(k)\ , \quad x \mapsto (M_0(x) : \ldots : M_{N(d)}(x))$$

heißt *Veronese-Einbettung*.

a) Wir identifizieren den Koordinatenring $k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]$ von $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ mit

$$k\Big[Y_\nu \mid \nu = (\nu_0, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\Big].$$

Zeige, dass für den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_d : k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)] \to k[X_0, \dots, X_n]\ , \quad Y_\nu \mapsto X^\nu := X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$$

gilt: $\mathrm{Bild}(\rho_d) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

b) Zeige: Die Mengen

$$U_0 = D(Y_{(d,0,\dots,0)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)),\ \dots,\ U_n = D(Y_{(0,\dots,0,d)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$$

bilden eine offene Überdeckung von $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

c) Bestimme für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ einen Umkehrmorphismus $\psi_d^i : U_i \to \mathbb{P}^n(k)$ von ρ_d und begründe, warum sich diese zu einem globalen Umkehrmorphismus ψ_d von ρ_d „verkleben" lassen.

d) Folgere, dass ρ_d ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und einer irreduziblen, projektiven Varietät in $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ ist.

e) Zeige: Für jedes homogene Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ von Grad d gibt es ein lineares, homogenes Polynom $F \in k[Y_0, \dots, Y_{N(d)}]$, so dass

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$

Abgabe bis Freitag, den 16.12.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.