Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

16.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 8

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 4 *Veronese-Einbettung* (7 Punkte)
Es seien $M_0, M_1, \ldots, M_{N(d)}$ die Monome von Grad d in $k[X_0, \ldots, X_n]$. (Hierbei ist $N(d) = \binom{n+d}{d} - 1$.) Der Morphismus

$$\rho_d : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^{N(d)}(k)\,, \quad x \mapsto (M_0(x) : \ldots : M_{N(d)}(x))$$

heißt *Veronese-Einbettung*.

a) Wir identifizieren den Koordinatenring $k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]$ von $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ mit

$$k\Big[Y_\nu \mid \nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\Big].$$

Zeige, dass für den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_d : k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)] \to k[X_0, \ldots, X_n]\,, \quad Y_\nu \mapsto X^\nu := X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$$

gilt: $\mathrm{Bild}(\rho_d) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

b) Zeige: Die Mengen

$$U_0 = D(Y_{(d,0,\ldots,0)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)),\ \ldots,\ U_n = D(Y_{(0,\ldots,0,d)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$$

bilden eine offene Überdeckung von $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

c) Bestimme für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ einen Umkehrmorphismus $\psi_d^i : U_i \to \mathbb{P}^n(k)$ von ρ_d und begründe, warum sich diese zu einem globalen Umkehrmorphismus ψ_d von ρ_d „verkleben" lassen.

d) Folgere, dass ρ_d ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und einer irreduziblen, projektiven Varietät in $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ ist.

e) Zeige: Für jedes homogene Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ von Grad d gibt es ein lineares, homogenes Polynom $F \in k[Y_0, \ldots, Y_{N(d)}]$, so dass

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$

Lösung:
Die Lösung von Aufgabenteil a) und b) haben wir bereits in der Übung gesehen. Sei

$$\Sigma = \{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\}.$$

c) Sei zur besseren Notation $i = 0$. Wir definieren für $y \in U_0$ (d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$)

$$\psi_d^0(y) = (y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \in \mathbb{P}^n(k).$$

(Allgemein steht an der i-ten Stelle d, bzw. $d-1$.) ψ_d^0 ist ein wohldefinierter Morphismus. Wir zeigen nun, dass ψ_d^0 invers zu $\rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)}$ ist.

Sei $x \in \rho_d^{-1}(U_0)$. Dann gilt $x_0^d \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\psi_d^0 \circ \rho_d(x) &= \psi_d^0(\ldots : x^\nu : \ldots) \\
&= (x^{(d,0,\ldots,0)} : x^{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \cdots : x^{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_0^{d-1}x_n) \\
&\overset{x_0 \neq 0}{=} (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = x
\end{aligned}$$

Somit gilt $\psi_d^0 \circ \rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)} = \mathrm{id}_{\rho_d^{-1}(U_0)}$.

Als nächstes zeigen wir $\rho_d \circ \psi_d^0 = \mathrm{id}_{U_0}$. Dazu brauchen wir noch eine weitere Relation. Für $\nu \in \Sigma$ ist

$$\begin{aligned}
\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n}) &= X_0^{d\nu_0} X_0^{(d-1)\nu_1} X_1^{\nu_1} \cdots X_0^{(d-1)\nu_n} X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)\sum_{i=0}^n \nu_i} X_0^{\nu_0} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)d} X^\nu \\
&= \Phi_d(Y_\nu)\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)}).
\end{aligned}$$

Das bedeutet: Für alle $\nu \in \Sigma$ gilt

$${Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} - Y_\nu {Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} \in \mathrm{Kern}(\Phi_d).$$

Damit folgt für $y \in U_0$, d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\rho_d \circ \psi_d^0(y) &= \rho_d(y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (\ldots : {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} : \ldots) \\
&= (\ldots : y_\nu {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} : \ldots) \overset{y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0}{=} y.
\end{aligned}$$

Auf $U_i \cap U_j$ sind ψ_d^i und ψ_d^j beides Umkehrabbildungen zu ρ_d. Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung gilt für alle $y \in U_i \cap U_j$

$$\psi_d^i(y) = \psi_d^j(y).$$

Damit verkleben sich die ψ_d^i zu einem Morphismus

$$\psi_d : V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)) \to \mathbb{P}^n,$$

der ein Umkehrmorphismus zu ρ_d ist.

d) Der Morphismus ρ_d ist nach c) ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

   Der Homomorphismus Φ_d ist homogen vom Grad d, denn jedes Y_ν wird auf ein homogenes Polynom von Grad d geschickt. (Es gilt $\Phi_d(k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]_e) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]_{de}$ für alle $e \in \mathbb{N}_0$.) Damit ist $\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ein homogenes Ideal und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ eine projektive Varietät.

   $\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ist ein Primideal, denn $\mathrm{Bild}(\Phi_d) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]$ ist nullteilerfrei. Somit ist $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ irreduzibel, wie gefordert.

e) Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen von Grad d,

$$f = \sum_{\nu\in\Sigma} a_\nu X^\nu.$$

   Wir setzen $F = \sum_{\nu\in\Sigma} a_\nu Y_\nu$. Dann ist $F(\rho_d(x)) = f(x)$ und es folgt

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$