Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es bezeichne $i\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ die Inversion am Einheitskreis $x \mapsto \frac{1}{|x|^2} \cdot x$. Weiter bezeichne H die Verschwindungsmenge $H = V(X^2 - Y^2 - 1) \subseteq \mathbf{R}^2$ des Polynoms $X^2 - Y^2 - 1$.

(a) Skizzieren Sie den Einheitskreis, H und $i(H)$.

(b) Sei $m = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in \mathbf{R}^2$. Zeigen Sie, dass $|x - m| \cdot |x + m| = \frac{1}{2}$ für alle $x \in i(H)$.

(c) Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbf{Z}[X, Y]$ von Grad 4, so dass $V(f) = i(H) \cup \{0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal mit Verschwindungsmenge $V = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$. Weiter seien $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ Polynome mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f/g\colon V \to \mathbb{A}^1(k), x \mapsto f(x)/g(x)$ polynomial ist, d.h. dass es ein Polynom $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $(f/g)(x) = h(x)$ für alle $x \in V$ gibt.

(b) Gilt die Aussage aus Teil (a) immer noch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, I eine beliebige Indexmenge und $\mathfrak{X} = \{X_i\}_{i \in I}$. Weiter sei $J \subseteq k[\mathfrak{X}]$ ein Ideal und A bezeichne den Quotienten $A = k[\mathfrak{X}]/J$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede kommutative k-Algebra B die Menge $H_A(B) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B)$ in natürlicher Bijektion zur Menge $V_B(J) = \{x \in B^I \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in J\}$ steht.

(b) Sei nun k algebraisch abgeschlossen und I endlich. Zeigen Sie, dass die Bijektion aus Teil (a) eine Bijektion zwischen der Menge $V_k(J)$ und der Menge der maximalen Ideale in A induziert.

Abgabe am Donnerstag, den 24. 4. 2014 in der Übung.