Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien A ein noetherscher Ring und $I \subseteq A$ ein Radikalideal. Zeigen Sie, dass es dann endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \subseteq A$ mit

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$$

gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien k ein Körper sowie $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus von algebraischen Mengen über k mit Komorphismus φ^*. Weiter seien $x \in V$ und $y \in W$ Punkte mit Verschwindungsidealen $\mathfrak{m}_x$ bzw. $\mathfrak{m}_y$. Zeigen Sie, dass $\varphi(x) = y$ genau dann, wenn $\varphi^{*,-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei k ein Körper.

(a) Sei $\varphi\colon \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^2(k)$ der Morphismus $t \mapsto (t^2, t^3)$. Zeigen Sie, dass φ zwar ein Homöomorphismus auf sein Bild jedoch im Allgemeinen kein Isomorphismus ist.

(b) Sei nun $\mathrm{char}(k) = p > 0$ und k algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass der Morphismus $F\colon \mathbb{A}^1(k) \to \mathbb{A}^1(k)$ mit $t \mapsto t^p$ ein Homöomorphismus jedoch kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei k ein Körper und $\mathrm{SL}_2(k)$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in k und Determinante 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(k)$ eine algebraische Menge ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k) \to \mathrm{SL}_2(k)$, $(A, B) \mapsto AB$ und die Inversion $\mathrm{SL}_2(k) \to \mathrm{SL}_2(k)$, $A \mapsto A^{-1}$ Morphismen von algebraischen Mengen sind und geben Sie die zugehörigen Komorphismen zwischen den Koordinatenringen an.

(c) Bestimmen Sie die Dimension sowie alle singulären Punkte der irreduziblen Komponenten von $\mathrm{SL}_2(k)$.

(d) Können Sie Ihre Beobachtungen auf die Gruppe $\mathrm{SL}_n(k)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in k und Determinante 1 verallgemeinern?

Abgabe am Donnerstag, den 08. 05. 2014, in der Übung.