Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus algebraischer Mengen über einem beliebigen Körper k.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi(V)$ genau dann dicht in W liegt, wenn der Komorphismus φ^* injektiv ist.

(b) Es sei nun V eine Varietät und das Bild von φ liege dicht in W. Zeigen Sie, dass W in diesem Fall bereits irreduzibel ist.

(c) Es sei wieder V eine Varietät und $\psi : V \to W$ ein weiterer Morphismus, der auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subseteq V$ mit φ übereinstimmt. Zeigen Sie, dass φ und ψ dann bereits auf ganz V übereinstimmen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Varietät mit Koordinatenring $k[V]$. Weiter seien $f \in k[V]$ und $U = U(f)$.

(a) Finden Sie eine algebraische Menge $W \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ und einen Homöomorphismus $\varphi : W \to U$.

(b) Statten Sie den topologischen Raum U mit einer Algebra $k[U]$ von Funktionen mit Werten in k aus, so dass U zusammen mit $k[U]$ zu einer abstrakten algebraischen Varietät wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien G eine Varietät der Dimension d über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0 sowie $e \in G$ ein Punkt. Weiter seien $\mu : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$ Morphismen, so dass G zusammen mit $\mu(g, h) = g \cdot h$ und $\iota(g) = g^{-1}$ eine Gruppe mit neutralem Element e bildet.

(a) Zeigen Sie, dass G glatt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\mathrm{d}c_g$ der Konjugation $c_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ eine Operation von G auf dem Tangentialraum $\mathfrak{g} = T_e(G)$ induziert. Zeigen Sie darüber hinaus, dass diese Operation durch einen Morphismus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}_k(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{A}^{d^2}(k)$ von algebraischen Mengen gegeben ist.

(c) Bestimmen Sie im Fall $G = \mathrm{SL}_2(k)$ den Morphismus Ad aus Teil (b) und die Ableitung $\mathrm{ad} = \mathrm{d}\,\mathrm{Ad}$ von Ad bei $e \in G$.

Abgabe am Donnerstag, den 15. 05. 2014, in der Übung.