Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V = V(Y^2 - X^3)$ die Neilsche Parabel.

(a) Zeigen Sie, dass V birational äquivalent zu $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

(b) Berechnen Sie M_P und M_P/M_P^2 für alle $P \in V$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Weiter seien a und b natürliche Zahlen und $V = V(X^a - Y^b) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$. Schließlich sei $\varphi\colon \mathbb{A}^1(k) \to V$ der Morphismus $t \mapsto (t^b, t^a)$.

(a) Für welche a und b ist φ injektiv, surjektiv oder gar ein Isomorphismus?

(b) Zerlegen Sie V in Abhängigkeit von a und b in irreduzible Komponenten.

(c) Für welche a und b ist φ eine birationale Abbildung?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien A ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal M und $k = A/M$ der Restklassenkörper. Zeigen Sie, dass die minimale Anzahl an Erzeugern von M genau die k-Dimension von M/M^2 ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien k ein Körper, A eine k-Algebra, und M ein A-Modul. Eine Derivation D auf A mit Werten in M ist eine k-lineare Abbildung $D\colon A \to M$, so dass $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ für alle $f, g \in A$. Die Menge $\mathrm{Der}(A, M)$ aller Derivationen auf A mit Werten in M ist offenbar ein k-Vektorraum.

Ab jetzt sei k algebraisch abgeschlossen. Weiter seien V eine k-Varietät und $P \in V$ ein Punkt. Der Körper k wird durch die Vorschrift $f \cdot a \coloneqq f(P) \cdot a$ zu einem $k[V]$-Modul, welchen wir mit k_P bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $T_P V$ isomorph zu $\mathrm{Der}(k[V], k_P)$ ist.

(b) Es sei $k[\varepsilon] \coloneqq k[X]/(X^2)$ und ε bezeichne das Bild von X in $k[\varepsilon]$. Weiter bezeichne π den eindeutigen Homomorphismus $k[\varepsilon] \to k$ von k-Algebren. Versehen Sie die Menge

$$\mathrm{Def}(k[V], P) \coloneqq \{\, \alpha\colon k[V] \to k[\varepsilon] \mid \pi\alpha(f) = f(P) \,\}$$

mit der Struktur eines k-Vektorraums und zeigen Sie, dass $\mathrm{Def}(k[V], P)$ dann isomorph zum Tangentialraum $T_P V$ ist.

(c) Sei nun $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus von k-Varietäten. Beschreiben Sie das Differential $\mathrm{d}\varphi$ von φ in einem Punkt $P \in V$ als Homomorphismus $\mathrm{Der}(k[V], k_P) \to \mathrm{Der}(k[W], k_{\varphi(P)})$ bzw. als Homomorphismus $\mathrm{Def}(k[V], P) \to \mathrm{Def}(k[W], \varphi(P))$ zwischen den jeweiligen Inkarnationen des Tangentialraumes aus den Aufgabenteilen (a) und (b).

Abgabe am Donnerstag, den 22. 05. 2014, in der Übung.