Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Es sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Weiter sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, d. h. eine Teilmenge S von A, die für je zwei Elemente $s, t \in S$ auch deren Produkt $s \cdot t$ und außerdem die Eins enthält. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ von A bei S ist der Quotient von $A \times S$ nach der Äquivalenzrelation $\sim$ mit

$$(a, s) \sim (a', s') \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ mit } t(as' - a's) = 0 \text{ gibt.}$$

Im Folgenden schreiben wir $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse des Paares (a, s) in $S^{-1}A$.

(a) Zeigen Sie, dass $S^{-1}A$ mit den Verknüpfungen

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} \coloneqq \frac{at + bs}{st} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \coloneqq \frac{ab}{st}$$

zu einem kommutativen Ring mit Eins wird.

(b) Finden Sie einen Ringhomomorphismus $i\colon A \to S^{-1}A$, so dass das Paar $(S^{-1}A, i)$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jeden Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ mit $\varphi(S) \subseteq B^\times$ gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\hat{\varphi}\colon S^{-1}A \to B$, so dass $\varphi = \hat{\varphi} \circ i$.

Sei nun $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal und $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ wird in diesem Fall auch mit $A_\mathfrak{p}$ bezeichnet. Im Folgenden fassen wir Teilmengen von A vermöge der Abbildung i aus Teil (b) als Teilmengen von $A_\mathfrak{p}$ auf ohne dies explizit kenntlich zu machen.

(c) Zeigen Sie, dass $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass es eine natürliche injektive Abbildung $A/\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ gibt, welche genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in A ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Krull-Dimension $\dim A_\mathfrak{p}$ das Supremum über die Längen ℓ aller Ketten

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_\ell = \mathfrak{p}$$

von Primidealen in A unter $\mathfrak{p}$ ist. Diese Größe wird auch oft die Höhe des Primideals $\mathfrak{p}$ genannt.

(f) Ist A nullteilerfrei, so können wir alle $A_\mathfrak{p}$ als Teilringe des Quotientenkörpers von A auffassen. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation die Gleichungen

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subseteq A \\ \text{maximal}}} A_\mathfrak{m} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{prim}}} A_\mathfrak{p}$$

gelten.

(g) Kennen Sie ein Beispiel für eine Lokalisierung aus der algebraischen Geometrie?

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es seien k ein kommutativer Ring und A eine kommutative k-Algebra. Weiter sei G eine Gruppe, welche auf A durch Homomorphismen von k-Algebren derart operiere, dass alle Bahnen $G.x$, $x \in A$, endlich sind. Schließlich bezeichne ${}^G\!A = \{x \in A \mid g.x = x \text{ für alle } g \in G\}$ den Ring der Invarianten.

(a) Zeigen Sie, dass A ganz über ${}^G\!A$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass ${}^G\!A$ eine endlich erzeugte k-Algebra ist, falls k noethersch und A eine endlich erzeugte k-Algebra ist.

Seien nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper und V eine k-Varietät. Weiter sei G eine Gruppe, welche auf V derart durch Morphismen operiere, dass alle Bahnen $G.f$ der induzierten Operation $(g.f)(P) = f(g^{-1}P)$ auf dem Koordinatenring endlich sind.

(c) Versehen Sie den Bahnenraum $G\backslash V$ mit der Struktur einer k-Varietät.

(d) Berechnen Sie den Bahnenraum $\{\pm 1\}\backslash \mathbf{C}^2$ als $\mathbf{C}$-Varietät.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $\varphi\colon V \to W$ ein Morphismus von Varietäten und $\varphi^*\colon k[W] \to k[V]$ der dazugehörige Komorphismus. Ist $I \subseteq k[V]$ eine Teilmenge, so schreiben wir im Folgenden $k[W] \cap I$ für das Urbild von I unter φ^*.

(a) Zeigen Sie, dass φ abgeschlossen ist, d. h. abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet, falls es für je zwei Primideale $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ in $k[W]$ und jedes Primideal $\mathfrak{P}$ in $k[V]$ mit $k[W] \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ ein Primideal $\mathfrak{Q}$ in $k[V]$ mit

   (i) $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{Q}$ und

   (ii) $k[W] \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{q}$

   gibt.

(b) Gilt auch die Umkehrung der Aussage aus Teil (a)?