Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} A_d$ ein graduierter kommutativer Ring mit Eins. Weiter seien $I, J \subseteq A$ Ideale.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen (i) – (iii) äquivalent sind:

(i) I wird von homogenen Elementen erzeugt.

(ii) $I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} I \cap A_d$.

(iii) Ein Element $x \in A$ ist dann und nur dann in I enthalten, wenn dies auch auf alle seine homogonen Komponenten $x_d \in A_d$, $x = \sum_{d \in \mathbb{N}_0} x_d$, zutrifft.

(b) Seien nun I und J homogen. Zeigen Sie, dass dann auch die Ideale $I + J$, $I \cdot J$, $I \cap J$ und $\sqrt{I}$ homogen sind.

(c) Zeigen Sie, dass in einem noetherschen graduierten Ring A jedes homogene Ideal von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei k ein Körper. Das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_1, \dots, P_4)$ von vier paarweise verschiedenen Punkten $P_i = (x_i : y_i) \in \mathbb{P}^1(k)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{DV}(P_1, \dots, P_4) \coloneqq \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} : \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_2 y_4 - x_4 y_2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis invariant unter der Aktion von $\mathrm{PGL}_2(k)$ auf $\mathbb{P}^1(k)$ ist, d. h. dass

$$\mathrm{DV}(P_1, \dots, P_4) = \mathrm{DV}(gP_1, \dots, gP_4)$$

für jedes $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ und alle $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^1(k)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{PGL}_2(k)$ dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$ operiert, d. h. dass es zu je zwei Paaren von drei paarweise verschiedenen Punkten $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ stets ein Element $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(gP_1, gP_2, gP_3) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ gibt.

(c) Wie hängen für $\sigma \in S_4$ die Doppelverhältnisse $\mathrm{DV}(P_1, \dots, P_4)$ und $\mathrm{DV}(P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(4)})$ zusammen? Welche Permutationen ändern das Doppelverhältnis nicht?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $G = \mathrm{GL}_2(k)$. Weiter sei $V = \mathbb{P}^1(k) \times \ldots \times \mathbb{P}^1(k)$ das r-fache Produkt der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(k)$. Dann operiert die Gruppe G auf V vermöge der Vorschrift $g(P_1, \dots, P_r) = (gP_1, \dots, gP_r)$. Zeigen Sie, dass der Bahnenraum dieser Operation genau dann endlich ist, wenn $r < 4$.

Abgabe am Donnerstag, den 05. 06. 2014, in der Übung.