Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\varphi\colon \mathbb{P}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$ die auf der Menge

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(k) \mid \text{ maximal eine der Koordinaten } x, y, \text{ oder } z \text{ verschwindet }\}$$

durch die Vorschrift $(x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$ gegebene Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine rationale Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass φ sogar eine birationale Äquivalenz definiert, die ihr eigenes Inverses ist.

(c) Finden Sie offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{P}^2(k)$, so dass die Einschränkung von φ auf U einen Isomorphismus $U \to V$ definiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Verschwindungsmenge $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ einer Linearform $f \neq 0$ ist eine projektive Hyperebene.

(a) Zeigen Sie, dass eine Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ genau dann ein Schnitt von Hyperebenen ist, wenn es Linearformen gibt, welche $I(V)$ erzeugen.

(b) Sei V ein Schnitt von Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$. Finden Sie in Abhängigkeit von $\dim V$ eine möglichst gute untere Schranke für die minimale Anzahl an linearen Erzeugern von $I(V)$.

(c) Seien V und W Schnitte von Hyperebenen in $\mathbb{P}^n(k)$, so dass $\dim V + \dim W \geq n$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $V \cap W \neq \emptyset$.

(d) Können Sie in der Situation von Teil (c) eine untere Schranke für die Dimension von $V \cap W$ angeben?

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $Q = V(XY - ZW) \subseteq \mathbb{P}^3(k)$.

(a) Finden Sie zwei durch $t \in \mathbb{P}^1(k)$ parametrisierte Familien $\{G_t\}$ und $\{H_t\}$ von Untervarietäten von Q, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (i) G_t und H_t sind für alle $t \in \mathbb{P}^1(k)$ von Dimension 1.

   (ii) Die Verschwindungsideale von G_t und H_t werden von Linearformen erzeugt.

   (iii) $G_t \cap G_s = \emptyset$ und $H_t \cap H_s = \emptyset$ für alle $s \neq t$.

   (iv) $G_t \cap H_s$ besteht für alle $s, t \in \mathbb{P}^1(k)$ aus genau einem Punkt.

(b) Was hat Aufgabenteil (a) mit der Segre-Einbettung aus der Vorlesung zu tun?

(c) Zeigen Sie nun, dass Q zwar birational äquivalent jedoch nicht isomorph zu $\mathbb{P}^2(k)$ ist.

Abgabe am Donnerstag, den 12. 06. 2014, in der Übung.