Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Der Raum $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$ lässt sich als Teilmenge $U(X_0) \times \mathbb{P}^{n-1}(k) \subset \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$ auffassen. Funktionen auf $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$ können wir dann als Polynome $f(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ interpretieren, welche homogen in den Variablen Y_i sind.

Es sei nun $B_0 \subseteq \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1}(k)$ die Verschwindungsmenge der Polynome $X_iY_j - X_jY_i$. Weiter sei φ die Komposition $B_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{A}^n(k)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Faser $\varphi^{-1}(P)$ für jeden Punkt $P \in \mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\}$ aus nur einem einzigen Punkt besteht. Berechnen Sie auch die Faser $E = \varphi^{-1}(0)$ von φ über 0. Diese Faser wird auch *exzeptionelle Kurve* genannt.

(b) Seien $a_1, \dots, a_n \in k$, so dass mindestens ein a_i nicht verschwindet. Weiter bezeichne G die Gerade $x_i = a_it$, $t \in k$. Berechnen Sie den Abschluss von $\varphi^{-1}(G \setminus \{0\})$ in B_0.

(c) Zeigen Sie, dass B_0 irreduzibel ist.

Seien nun $n = 2$, $V \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ eine Varietät und $\widetilde{V}$ der Abschluss des Urbilds $\varphi^{-1}(V \setminus \{0\}) \subseteq B_0$ in B_0. Man nennt $\widetilde{V}$ auch die *strikte Transformierte* von V.

(d) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von φ auf $\widetilde{V}$ eine birationale Äquivalenz $\widetilde{V} \to V$ definiert.

(e) Geben Sie eine möglichst genaue Beschreibung von $\widetilde{V}$ und $E \cap \widetilde{V}$ für die folgenden Varietäten V:
   (i) $V = V(Y^2 - X^2(X+1)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
   (ii) $V = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

(f) Betrachten Sie nun die rationale Abbildung $i\colon \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$, welche durch $i(x, y) = (x : y)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass es einen Morphismus $j\colon B_0 \to \mathbb{P}^2(k)$ gibt, so dass $j(x) = i\varphi(x)$ für alle $x \in B_0$ mit der Eigenschaft, dass i bei $\varphi(x)$ definiert ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Wieder sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für $n, d \geq 1$ seien $M_0, \dots, M_N$ alle Monome vom Grad d in $k[X_0, \dots, X_n]$. Eine einfache Rechnung zeigt $N = \binom{d+n}{n} - 1 = \binom{d+n}{d} - 1$. Wir betrachten den Morphismus

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbb{P}^n(k) & \to & \mathbb{P}^N(k) \\ x & \mapsto & (M_0(x) : \dots : M_N(x)) \end{cases},$$

welcher auch *Veronese-Einbettung* von $\mathbb{P}^n(k)$ in $\mathbb{P}^N(k)$ heißt. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Bild}(\phi)$ ist eine projektive Varietät in $\mathbb{P}^N(k)$.

(b) $\phi\colon \mathbb{P}^n(k) \to \mathrm{Bild}(\phi)$ ist ein Isomorphismus.

(c) Ist $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d, so gibt es ein lineares homogenes Polynom $F \in k[Y_0, \dots, Y_N]$ mit $\phi(V(f)) = \mathrm{Bild}(\phi) \cap V(F)$.

(d) Bestimme $\mathrm{Bild}(\phi)$ für $n = 1$ und $d = 3$.

Abgabe am Freitag, den 20.06.2014, im Büro des Übungsleiters.