Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein
Tobias Columbus

Algebraische Geometrie – Blatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien k ein Körper, dessen Charakteristik nicht ausgerechnet 2 ist, $a, b, c \in k^\times$ und $A = \operatorname{diag}(a, b, c)$.
$E := V(aX^2 + bY^2 + cZ^2)$ ist eine reguläre Kurve in $\mathbb{P}^2(k)$.
Wir definieren für $P = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2(k)$ die Gerade $\pi(P)$ durch

$$\pi(P) := \{(r : s : t) \in \mathbb{P}^2(k) \mid axr + bys + czt = 0\}.$$

Analog definieren wir für die Gerade $g \subset \mathbb{P}^2(k)$ den Punkt $\pi(g)$ durch

$$\pi(g) = \text{das } (x : y : z) \in \mathbb{P}^2(k) \text{ mit } \forall (r : s : t) \in g : axr + bys + czt = 0.$$

Dies ist wohldefiniert, weil die durch A gegebene Bilinearform auf k^3 eine Identifikation von k^3 mit seinem Dualraum vermittelt.

a) $\pi \circ \pi = \mathrm{Id}$ auf $\mathbb{P}^2(k)$ und auf der Menge aller Geraden in $\mathbb{P}^2(k)$.

b) $g \subset \mathbb{P}^2(k)$ ist genau dann eine Tangente an E, wenn $\pi(g) \in E$.

c) Für zwei Geraden g, h mit $g \cap h = \{P\}$ ist $\pi(P)$ die Gerade, die $\pi(g)$ und $\pi(h)$ verbindet.

d) Drei Geraden $g_1,\ g_2,\ g_3$ schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn $\pi(g_1), \pi(g_2)$ und $\pi(g_3)$ auf einer Geraden liegen.

e) Es seien $g_1, \ldots, g_6$ verschiedene Tangenten an E und jeweils $P_{i,j}$ der Schnittpunkt von g_i und g_j. Dann schneiden sich die drei Verbindungsgeraden $\overline{P_{1,2}, P_{4,5}}$, $\overline{P_{2,3}, P_{5,6}}$ und $\overline{P_{3,4}, P_{1,6}}$ in einem Punkt.

Bemerkung: π heißt die zu E gehörende Polarisierung und $\pi(P)$ die Polare zu P. Die Entdeckung dieses Mechanismus war historisch gesehen ein erstes Indiz dafür, dass Dualräume wichtig sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien k algebraisch abgeschlossen, $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine Kurve, $P \in C$ ein singulärer Punkt und G eine Gerade durch P.
Zeigen Sie für die als existent angenommene lokale Schnittmultiplizität

$$I_P(C, G) > 1.$$

Hinweis: Die Rückseite ist leer. Drehen Sie dieses Blatt nur um, wenn Sie auf ihr die Aufgaben bearbeiten wollen ;-) Über daraus resultierende Abgaben würden wir uns freuen.