KIT Karlsruhe, April 2014

Institut Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein

Geschichte der Algebraischen Geometrie

frei nach Dieudonné

Ein sehr grober und sicher lückenhafter Abriss der Geschichte der algebraischen Geometrie könnte z.B. so aussehen:

1. Bis etwa 1630

Die Anfänge der Geometrie kannten keine Algebra, niemand tat das damals. Allerdings wurden erste Objekte der algebraischen Geometrie (insbes. Kegelschnitte. . .) schon bei den Griechen untersucht (Apollonius, 3. Jh. vuZ). Auch die zahlentheoretischen Fragestellungen von Diophantus (2. Jhdt. vuZ) kann man heute zur algebraischen Geometrie rechnen.

Es gab allerdings keine Möglichkeit, geometrische Objekte als Nullstellenmengen von Polynomen zu beschreiben, denn es gab keine Polynome! Schließlich kann man ja auch nicht eine Länge, einen Flächeninhalt und ein Volumen addieren (und lineare, quadratische oder kubische Terme wurden oft so interpretiert).

Umgekehrt wurden allerdings geometrische Argumente benutzt, um algebraische Sachverhalte zu verstehen.

2. 1630 – 1795: Koordinaten

Dank Descartes (1596 – 1650) und Fermat (1608 – 1665) entwickelte sich die Koordinatisierung der Geometrie, und damit auch die Möglichkeit, rechnerisch mit geometrischen Daten umzugehen. Insbesondere erkannte Fermat, dass die Kegelschnitte im Wesentlichen die Nullstellenmengen von quadratischen Polynomen (in zwei Variablen) sind. Im Anschluss wurden viele Beispiele von Kurven in der Ebene diskutiert, und ansatzweise auch Flächen im Raum.

Viele Versuche, allgemeine Aussagen zu erkennen, scheiterten aber entweder an geometrischen oder an algebraischen Defiziten. Als wichtige Hilfsmittel erwiesen sich

3. 1795 – 1850: Projektive Räume und komplexe Zahlen

Durch Hinzunahme einer „unendlich fernen“ Geraden lässt sich die affine Ebene vervollständigen zur projektiven Ebene. In dieser sieht man, dass zum Beispiel eine Parabel nur ein Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel ist, und dass alle drei Kegelschnitttypen „in Wirklichkeit“ (was auch immer das ist) nur ein Typ sind, der die unendlich ferne Gerade in einem, null oder zwei Punkten schneidet. Auch gibt es eine interessante Dualität zwischen Punkten und Geraden: viele Aussagen über Punkte und ihre Verbindungsgeraden sind äquivalent zu entsprechenden Aussagen zwischen Geraden und ihren Schnittpunkten. Dass es immer einen Schnittpunkt gibt, liegt an der Konstruktion der projektiven Ebene.

Noch mehr Fallunterscheidungen werden überflüssig, wenn man statt reeller Zahlen komplexe Zahlen verwendet. Dafür mussten diese aber erst erfunden sein und zum Beispiel brauchte man den Fundamentalsatz der Algebra.

Die Jahreszahl 1795 steht für den Beginn de Erscheinens der *Géométrie* von Monge (1746 – 1818), wobei eher dessen Schüler (insbes. Poncelet, 1788 – 1867) für Projektives zuständig war.

Wichtige Namen: Cayley (1821 – 1895), Gauß (1777 – 1855), Möbius (1790 – 1868), Plücker (1801 – 1868).

1850 – 1866: Riemann

Bernhard Riemann (1826 – 1866) gab der (algebraischen) Geometrie neue wichtige Impulse. Insbesondere legte er Wert darauf, geometrische Objekte unabhängig von einer Einbettung in affine oder projektive Räume zu betrachten. Auch benutzte er in größerem Umfang analytische Methoden. Der Satz von Riemann-Roch war während der letzten 150 Jahre eine gewaltige Triebfeder; wie ließ er sich algebraisch verstehen, wie ließ er sich verallgemeinern? Das Studium der birationalen Abbildungen wurde initiiert.

1866 – 1920: Entwicklung und Chaos

Nach Riemann entstand die italienische Schule der Geometrie: Segre (1863 – 1924), Veronese (1857 – 1917), die wiederum stärker geometrisch motiviert war, was oft die formale Korrektheit der Argumente beeinträchtigte. Auch zu nennen sind Castelnuovo (1865 – 1952) und Enriques (1871 – 1946) und deren Beitrag zur Klassifikationstheorie algebraischer Flächen. Ein Vorläufer dieser italienischen Schule war Max Noether (1844 – 1922), der – wenn man van der Waerden glauben darf – die algebraische Geometrie erfunden hat. Aber das haben ja viele auf ihre jeweils eigene Art... Jedenfalls „übersetzte“ Noether weite Teile der Riemannschen Arbeiten ins Algebraische.

In Deutschland waren mit Dedekind (1831 – 1916), Kronecker (1823 – 1891) und Weber (1842 – 1913) die Algebraiker am Werke. Insbesondere wurde versucht, den Begriff des Differentials zu algebraisieren, und zu verstehen, wie man eine Körpererweiterung vom Transzendenzgrad 1 als Funktionenkörper einer Kurve interpretieren kann. Das zeigte weit gehende Analogien zwischen algebraischen Zahlkörpern und Funktionenkörpern, die auch heute noch wesentliche Einsichten liefern.

In Frankreich erlebte mit Poincaré (1854 – 1912) die Topologie ihre Geburtsstunde und gleichzeitig ihren Einzug in die algebraische Geometrie.

Gleichzeitig wurde es immer schwieriger, alle Verallgemeinerungsmethoden unter einen Hut zu bekommen. Was fehlte, war eine alles erklärende Struktur.

1920 – 1950: Neue Strukturen

Mit Emmy Noether (1882 – 1935) und ihrer Schule entstand die abstrakte Algebra, und damit gab es auch neue Werkzeuge und neue Herausforderungen für die Geometrie.

Drei Mathematiker sind vor allen anderen zu nennen, wenn es um eine Präzisierung von Begriffen geht, die in der algebraischen Geometrie vorher eher intuitiv verwendet wurden: Weil (1906 – 1998), van der Waerden (1903 – 1996) und Zariski (1899 – 1986). Letzterer ersann eine Möglichkeit, eine Topologie auf einer algebraischen Varietät zu definieren, die nur algebraische Information benötigt, also insbesondere über jedem Grundkörper zur verfügung steht.

Damit konnte die Loslösung vom Körper der komplexen Zahlen intensiviert werden; insbesondere Weil entwickelte seine geometrischen Methoden zur Lösung von zahlentheoretischen Fragestellungen (z.B. Abschätzung von Exponentialsummen!).

Was ebenfalls stärker ins Zentrum des Geschehens rückte war die Frage nach Abbildungen zwischen geometrischen Objekten. Mit dem Erwachen der Kategorientheorie in den fünfziger Jahren wurde diese Frage noch wichtiger.

ab 1950: Global denken – lokal handeln; Garben und Schemata

Aufgrund der Erfahrungen mit differenzierbaren Phänomenen wollte man es lernen, geometrische Objekte „lokal“ zu beschreiben, das heißt: in Umgebungen von Punkten. Insbesondere für die betrachteten Funktionen war dadurch eine Vorgabe gemacht: sie mussten Garben bilden, damit der Lokalisierungsprozess konsistent durchgeführt werden konnte.

Mit Grothendieck (1928 –), der stark von Serres (1926 –) Resultaten beeinflusst war, nahm die algebraische Geometrie eine erneute Wendung zu größerer Abstraktion, was gleichzeitig dafür sorgte, dass auch arithmetische Aspekte einer geometrischen Sichtweise zugänglich wurden. Zu jedem kommutativen Ring R lässt sich ein geometrisches Objekt bilden, das affine Schema $\mathrm{Spec}\,(R)$. Dieses Spektrum von R besteht aus allen Primidealen von R und wird mit einer (sehr groben) Topologie versehen. Anschließend lassen sich solche Spektren wieder „verkleben“ zu größeren Objekten – so genannten Schemata. Ein Schema ist ein topologischer Raum, versehen mit einer Garbe von kommutativen Ringen, der lokal zu einem Spektrum isomorph ist.

Letztlich sorgt dies häufig für den Eindruck, dass algebraische Geometrie eigentlich nur ein anderer Name für kommutative Algebra ist. Es gibt aber natürlich immer noch geometrische Argumente in der Geometrie... zum Glück. Alles, was vor Grothendieck erlaubt war, ist jetzt immer noch erlaubt, man kann in der neuen Sprache auch die alten Phänomene beschreiben. Und man kann eben auch manches algebraische Faktum besser verstehen, indem man es geometrisch interpretiert.

Für viele alte Fragen konnten mit den neuen Methoden von Grothendieck Antworten gefunden werden, viele alte Behauptungen konnte man fundiert rechtfertigen: Schnitttheorie, abzählende Geometrie, Mordell-Weil-Vermutung, Weilsche Vermutungen (etwas ganz anderes), Satz von Fermat...

Fieldsmedaillen für die algebraische Geometrie:

1954	Kunihiko Kodaira
	Jean-Pierre Serre
1966	Sir Michael Atiyah
	Alexander Grothendieck
1970	Heisuke Hironaka
1974	David Mumford
1978	Pierre Deligne
1986	Gerd Faltings
1990	Vladimir Drinfeld
	Shigefumi Mori
1998	Maxim Kontsevich
2002	Laurent Lafforgue
	Vladimir Voevodsky
2010	Ngô Bao Châu