Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

12.04.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Frühlingsübungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ zwei Garben von abelschen Gruppen auf X. Für eine offene Menge $U \subseteq X$ sei $\mathcal{F}_U$ die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf U, d.h. $\mathcal{F}_U(V) = \mathcal{F}(V)$ für alle offenen $V \subseteq U$. Weiter sei $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$ die Menge der Garbenhomomorphismen $\phi : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U$. Zeige, dass die Zuordnung

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$$

eine Garbe von abelschen Gruppen auf X ist. Sie heißt Hom-*Garbe* und wird mit $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $X \subset \mathbb{P}^n(K)$ eine quasiprojektive Varietät und $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. $\mathcal{O}_X$ sei die Garbe der regulären Funktionen auf X. Wir definieren eine Unterprägarbe $\mathcal{I} = \mathcal{I}_Y$ von $\mathcal{O}_X$ durch

$$\mathcal{I}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(y) = 0 \text{ für alle } y \in Y \cap U\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{I}$ eine Garbe auf X ist. Sie heißt *Idealgarbe* von Y.

b) Nun sei X projektiv und zusammenhängend. Es seien $P \neq Q \in X$ und $Y = \{P, Q\}$. Die Inklusion $i : Y \to X$ liefert einen Garbenmorphismus[1] $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$.

   Zeige, dass für jedes $x \in X$ die Sequenz von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln

$$0 \to (\mathcal{I}_Y)_x \to \mathcal{O}_{X,x} \to (i_* \mathcal{O}_Y)_x \to 0$$

   exakt ist, dass aber der Ringhomomorphismus

$$i^\sharp(X) : \mathcal{O}_X(X) \to i_* \mathcal{O}_Y(X)$$

   nicht surjektiv ist.

Abgabe bis Dienstag, den 19.04.2011 vor Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.

[1] $i_* \mathcal{O}_Y$ ist die *direkte Bildgarbe* von Blatt 4 aus dem letzten Semester; $i_* \mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}(U))$ für alle offenen $U \subseteq X$.