Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

28.06.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Schnapsblatt

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Das Tensorprodukt von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf einem Schema X ist definiert als die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.

Finde ein Beispiel, welches zeigt, dass diese Prägarbe im Allgemeinen noch keine Garbe ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei X ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ ist lokal frei von Rang eins, wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \subset X$ existiert, so dass $\mathcal{L}_{|U_x} \cong \mathcal{O}_{X|U_x}$ gilt. Zeige:

a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$.

b) Sind $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ lokal frei von Rang eins, so auch $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.

c) Ist $\mathcal{L}$ lokal frei von Rang eins, so auch $\mathcal{L}^{-1} := \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ und es gilt

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X \,.$$

Das sind die Hauptzutaten um zu zeigen, dass die Menge der Isomorphieklassen von lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modulgarben von Rang eins mit dem Tensorprodukt als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und D ein Divisor auf X.

Zeige, dass die Garbe $\mathcal{L}(D)$ lokal frei von Rang eins ist.

Abgabe bis Dienstag, den 05.07.2011 zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.