Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

19.04.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Blütenblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Wir ordnen $\mathcal{F}$ einen topologischen Raum $|\mathcal{F}|$ und eine stetige Abbildung $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ zu. Als Menge ist

$$|\mathcal{F}| = \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathcal{F}_x ,$$

die disjunkte Vereinigung aller Halme, und $\pi(s) = x$ für $s \in \mathcal{F}_x$. Wir definieren die Topologie wie folgt: Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ erhält man eine Abbildung

$$\hat{s} : U \to |\mathcal{F}| , \quad x \mapsto s_x ,$$

wobei s_x der Keim von s in x sei. Nun sei $|\mathcal{F}|$ mit der feinsten Topologie versehen, so dass alle $\hat{s}$ für alle offenen $U \subseteq X$ stetig sind. Jedes $\hat{s}$ ist ein Schnitt, d.h. $\pi \circ \hat{s} = \mathrm{id}_U$.

a) Zeige, dass π für jedes $s \in |\mathcal{F}|$ ein Homöomorphismus zwischen einer offenen Umgebung von s und einer offenen Menge von X ist.

b) $\mathrm{C}(|\mathcal{F}|)$ sei die *Garbe der stetigen Schnitte* von $\pi : |\mathcal{F}| \to X$,

$$\mathrm{C}(|\mathcal{F}|)(U) = \{s : U \to \pi^{-1}(U) \mid s \text{ ist ein stetiger Schnitt}\}.$$

Zeige, dass $\mathrm{C}(|\mathcal{F}|)$ die universelle Eigenschaft der zu $\mathcal{F}$ assoziierten Garbe erfüllt.

Der topologische Raum $|\mathcal{F}|$ heißt *espace étalé* zu $\mathcal{F}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. $\mathcal{F}$ heißt *welk*, wenn für jede Inklusion $V \subseteq U$ offener Mengen in X die Restriktion ρ^U_V surjektiv ist.

a) Zeige, dass eine lokal konstante Garbe auf einem irreduziblen topologischen Raum welk ist.

b) Wir definieren die Garbe $\mathcal{F}^{\neg}$ der mengentheoretischen Schnitte folgendermaßen: Für jedes offene $U \subseteq X$ sei $\mathcal{F}^{\neg}(U)$ die Menge der mengentheoretischen Schnitte $s : U \to \pi^{-1}(U) \subseteq |\mathcal{F}|$. Zeige, dass die Garbe $\mathcal{F}^{\neg}$ welk ist, und dass es einen natürlichen injektiven Garbenmorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\neg}$ gibt.

Abgabe bis Dienstag, den 26.04.2011 vor Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.