Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

26.04.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Maiblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeige, dass $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$ ein finales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist.

Ein Morphismus $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$ ist dabei ein Paar $(f, f^\#)$, wobei $f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ stetig ist, und $f^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \to f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ ein Garbenmorphisms ist, so dass für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ der induzierte Morphismus

$$f^\flat_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A), \mathfrak{p}}$$

lokal ist.[1]

b) Finde jeweils einen Ring A, so dass der Morphismus $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})})$

- genau einen Punkt als Bild hat,
- genau zwei Punkte als Bild hat,
- unendlich viele Punkte als Bild hat, aber nicht surjektiv ist,
- surjektiv ist.

Wie sieht jeweils der Morphismus auf den Halmen aus?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei A ein kommutativer Ring mit 1. Zeige:

a) Ein Element $e \in A$ ist genau dann idempotent (d.h. es gilt $e^2 = e$), wenn $1 - e$ idempotent ist.

b) Gibt es in A zwei Elemente $e_1, e_2 \notin A^\times$, so dass $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2$ nilpotent ist, so enthält A mindestens drei idempotente Elemente.

Hinweis: Betrachte das Ideal $I_n = (e_1^n, e_2^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\mathrm{Spec}(A)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A höchstens zwei idempotente Elemente enthält.

d) Gib einen Ring A an, sodass $\mathrm{Spec}(A)$ nicht zusammenhängend ist.

Abgabe bis **Donnerstag**, den 05.05.2011 **in der Vorlesung** oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.

[1] $f^\flat$ ist der eindeutige Morphismus in $\mathrm{Hom}(f^{-1} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$, der $f^\# \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ entspricht.