Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

05.05.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Langes Übungsblatt

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei $\mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema. Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \overline{\{x\}}$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Spec}(A)$ und den nichtleeren, abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(A)$ liefert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde das projektive Schema $\mathbb{P}^1(R)$ über einem Ring R auf zwei verschiedene Arten konstruiert. Einmal als $\mathrm{Proj}(R[X_0, X_1])$ und einmal als die Verklebung von $\mathrm{Spec}(R[X])$ mit $\mathrm{Spec}(R[Y])$ entlang $D(X)$ und $D(Y)$ vermöge des Isomorphismus

$$R[X, X^{-1}] \to R[Y, Y^{-1}]\,, \quad X \mapsto Y^{-1}.$$

Zeige, dass die so erhaltenen Schemata isomorph sind.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei S ein Schema mit einer offenen Überdeckung $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Außerdem seien X und Y Schemata mit Schemamorphismen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$. Wir setzen $X_i = f^{-1}(S_i)$ und $Y_i = g^{-1}(S_i)$. Zeige: Sofern die Faserprodukte existieren, gilt für jedes $i \in I$

$$X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X ein Schema und K ein Körper.

a) Extrahiere aus einem Schemamorphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$ einen Punkt $x \in X$ und eine Körpererweiterung $\kappa(x) \to K$ des Restklassenkörpers $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x} / m_{X,x}$.

b) Konstruiere umgekehrt zu jedem Paar (x, i), wobei $x \in X$ ein Punkt und $i : \kappa(x) \to K$ eine Körpererweiterung ist, einen Schemamorphismus $\mathrm{Spec}(K) \to X$.

Die Menge $\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(K), X) = X(K)$ *heißt die Menge der K-wertigen Punkte von X.*

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Bestimme die Menge der $\mathbb{R}$-wertigen und die Menge der $\mathbb{C}$-wertigen Punkte von $\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[X]$.

Abgabe bis Dienstag, den 17.05.2011 zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.