Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen Dipl.-Math. André Kappes

17.05.2011

Algebraische Geometrie 2 – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen mit 1. Wir betrachten $X = \operatorname{Spec} B$ und $Y = \operatorname{Spec} A$ und den von φ induzierten Schemamorphismus $(f, f^\#) = \operatorname{Spec}(\varphi) : X \to Y$. Zeige:

a) φ ist genau dann injektiv, wenn $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ injektiv ist. Ist φ injektiv, so ist f dominant, d.h. $f(X)$ ist dicht in Y.

b) Ist φ surjektiv, so ist f ein Homöomorphismus von X auf eine abgeschlossene Teilmenge von Y und $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ ist surjektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Bestimme die folgenden Faserprodukte:

a) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y]$ für die Inklusionen $R \to R[X]$ und $R \to R[Y]$.

b) $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R[Y]} \operatorname{Spec} R$ für die Ringhomomorphismen

$$R[Y] \to R\,, \quad Y \mapsto 0 \qquad \text{und} \qquad R[Y] \to R[X]\,, \quad Y \mapsto X^2.$$

c) $\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \overline{k}$, wobei L/k eine endliche separable Körpererweiterung ist und $\overline{k}$ der algebraische Abschluss von k.

Abgabe bis Dienstag, den 24.05.2011 zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.