Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

31.05.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Alle Schemata in dieser Aufgabe seien noethersch. Zeige:

a) Die Verkettung von separierten Morphismen ist separiert.

b) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Schemamorphismen, und ist $g \circ f$ separiert, so auch f.

c) Die Eigenschaft, separiert zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei X ein Schema. Für $f \in \mathcal{O}_X(X)$ und $x \in X$ sei $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ das Bild von f im Halm bei x, und $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ sei das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Wir setzen

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \notin m_x\}.$$

Zeige:

a) X_f ist eine offene Teilmenge von X.

b) X ist genau dann affin, wenn es endlich viele Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$ gibt, so dass gilt:
   - für alle $i = 1, \ldots, r$ ist X_{f_i} affin.
   - $(f_1, \ldots, f_r) = \mathcal{O}_X(X)$.

   Hinweis: Es sei $A = \mathcal{O}_X(X)$. Man darf ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{O}_{X_f}(X_f) \cong A_f$ gilt (und erhält 2 Extrapunkte, wenn man dies zeigt).

Abgabe bis Dienstag, den 07.06.2011 zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.