Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

07.06.2011

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. André Kappes

Algebraische Geometrie 2 – Traumhaftes Übungsblatt

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es sei X ein Schema. Zeige, dass jede abgeschlossene, irreduzible Teilmenge $Y \subset X$ einen eindeutigen generischen Punkt $y \in X$ besitzt, d.h. $Y = \overline{\{y\}}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. X sei eine nichtsinguläre, irreduzible, quasiprojektive Fläche über K und $t(X)$ das dazu gehörende Schema.

Zeige: Ist $Y \subset X$ eine irreduzible Kurve und $y \in t(X)$ ihr generischer Punkt, so ist $\mathcal{O}_{t(X),y}$ ein diskreter Bewertungsring.

Hinweis: Man darf ohne Beweis verwenden, dass die Lokalisierung eines regulären lokalen Rings bei einem Primideal wieder regulär ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt eine offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit affinen Mengen $V_i \cong \operatorname{Spec} R_i$, so dass gilt

(∗) Für jedes $i \in I$ gibt es eine offene Überdeckung $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j \in J_i} U_{ij}$ mit affinen Mengen $U_{ij} \cong \operatorname{Spec} A_{ij}$, so dass für jedes $j \in J_i$ der Ring A_{ij} als R_i-Algebra endlich erzeugt ist.

(ii) Für jede offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \cong \operatorname{Spec} R_i$ gilt (∗).

Abgabe bis Dienstag, den 14.06.2011 zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1.Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.